

Г. Бейтман

МГД- неустойчивости

*Перевод с английского
Л. Е. ЗАХАРОВА и С. В. ПУТВИНСКОГО*

*Под редакцией
члена-корреспондента АН СССР
В. Д. ШАФРАНОВА*

G. BATEMAN
MHD Instability

The MIT Press Cambridge, Massachusetts, and London,
England, 1979.

УДК 533.9 : 621.039.61

Бейтман Г. МГД-неустойчивости/Пер. с англ. Под ред. В. Д. Шафранова. — М.: Энергоиздат, 1982. — 200 с.

В проблеме управляемого термоядерного синтеза одной из центральных являются крупномасштабные магнитогидродинамические неустойчивости в установках типа «Токамак». Книга является первой монографией, целиком посвященной вопросам обеспечения МГД-устойчивости плазмы. Дан обзор экспериментальных результатов, полученных на установках токамак. Изложены основы МГД-модели и ее применение к исследованию неустойчивости Рэлея — Тейлора в плоском слое. На основе аналитических и численных методов развивается теория равновесия и устойчивости, а также нелинейная теория МГД-неустойчивости.

Для специалистов в области физики плазмы. Может быть рекомендована аспирантам и студентам старших курсов.

Ил. 63. Табл. 1. Библиогр. 263.

Рецензент Б. Б. Кадомцев.

1704040000—584 298—82.
051(01)—82

Copyright © 1978 by
The Massachusetts Institute of Technology

© Перевод на русский язык, Энергоиздат, 1982

ПРЕДИСЛОВИЕ

В начале 1969 г. советский физик Л. А. Арцимович прочел в Соединенных Штатах Америки серию лекций, в которых описал достоинства установок токамак, используемых в исследованиях по управляемому термоядерному синтезу. Токамаки — одна из разновидностей экспериментальных установок, созданных для длительного удержания горячего водородного газа, или плазмы, с тем чтобы в результате ядерных реакций получить полезную энергию. Несколько позже в том же 1969 г. английские физики доложили об измерениях, независимо подтвердивших советские измерения на токамаках, и в течение пяти лет в различных лабораториях мира было построено более дюжины токамаков. К 1976 г. в токамаках, построенных в Ок-Ридже и около Парижа, была достигнута температура большая, чем в центре Солнца; в Принстоне и в Москве было достигнуто время удержания в одну двадцатую секунды, а в Массачусетском технологическом институте (МТИ) была получена плотность плазмы, необходимая для реактора. Для реализации потенциальных возможностей управляемого термоядерного синтеза как нового источника энергии разрабатывается мощная программа исследований по увеличению плотности энергии и улучшению удержания плазмы.

Общей характерной чертой токамаков и большинства других систем для удержания плазмы является то, что диапазон их режимов ограничен неустойчивостями. В токамаках даже в нормальных режимах присутствуют неустойчивости, которые перемешивают плазму около центра и приводят к образованию стационарных винтовых структур вблизи края плазмы. При попытках увеличить ток или плотность плазмы возникают мощные неустойчивости, которые мгновенно разрушают разряд и могут повредить стенки камеры. По этим причинам важно уметь предсказывать свойства крупномасштабных неустойчивостей в удерживаемой плазме.

Многие из свойств этих неустойчивостей предсказываются магнитогидродинамической (МГД) моделью. В этой простой математической модели плазма рассматривается как идеально проводящая жидкость, на которую действуют силы давления и силы, связанные с магнитным полем. Эта модель является естественной отправной точкой для изучения равновесия и крупномасштабных неустойчивостей широкого класса магнитных конфигураций для удержания плазмы. Она, более чем какая-либо другая модель плазмы, с успехом применялась для рассмотрения сложных по геометрии конфигураций, и большая часть наших представлений о

разнообразных явлениях в экспериментах с горячей плазмой, а также астрофизических исследованиях сформировалась на основе этой модели.

В основу данной книги положен курс лекций, прочитанный впервые в Ок-Риджской национальной лаборатории в 1975 г. В течение шести месяцев научные сотрудники и инженеры с самой разной степенью подготовки по своей собственной инициативе собирались раз в неделю в обеденный перерыв. Если это было возможно, я предлагал коллегам прочесть лекции по тем темам, в которых они были более квалифицированы, чем я. Лекцию по тороидальному равновесию прочел Ли Берри; Дэвид Нельсон рассказал о математически достаточных условиях устойчивости; Карл Копенгейвер сделал введение в исследования по резистивным неустойчивостям; Юлиан Данлап дал обзор экспериментальных результатов по крупномасштабным неустойчивостям в токамаках; Фред Маркус сделал широкий обзор экспериментальных установок для удержания плазмы. Я всецело признаю здесь и отмечаю далее существенное влияние этих лекций на книгу.

Примерно через год я получил приглашения прочитать эти лекции в МТИ — от Дитера Сигмара и в университете в Иллинойсе — от Георга Мейтли. Эти лекции позволили сместить акценты в сторону более практических выводов и более физических аргументов. В каждом курсе лекций студенты проявляли повышенный интерес к нерешенным проблемам, парадоксам и вопросам, которые появляются почти в каждом разделе книги. Часто ответы студентов выражали новую точку зрения, а их собственные вопросы в значительной мере помогали мне.

При последующей доработке книги новые подходы и упрощенные выводы предложили Дэвид Нельсон, Джон Джонсон, Дитер Сигман, Ол Менс, Ли Берри, Брюс Ваддел, Джеймс Ром и многие другие мои коллеги по Ок-Риджу. Иллюстрации были мне любезно предоставлены многими физиками, что отмечено в каждом конкретном случае, чертежи были выполнены Эджин Л. Уаткин.

Г. Бейтман

Глава 1. ВВЕДЕНИЕ

Основной задачей программы управляемого термоядерного синтеза является нагрев газа, состоящего из смеси легких элементов, до очень высокой температуры, которая значительно больше, например, температуры в центре Солнца, и достаточно длительное удержание такой горячей плазмы для того, чтобы выделяющаяся в ядерных реакциях энергия была больше, чем затраченная. Если использовать смесь дейтерия и трития, то для получения положительного выхода энергии требуется температура по крайней мере 5—10 кэВ (где 1 кэВ=1000 эВ, 1 эВ=11 600 К=1,602·10⁻¹⁹ Дж; для примера, потенциал ионизации водорода равен 13,6 эВ), а произведение плотности частиц на время удержания должно быть не менее [5, 14]

$$n\tau \geq 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}. \quad (1.0.1)$$

Другие виды топлива требуют еще больших температур и времени удержания.

Основным препятствием на пути к осуществлению управляемого термоядерного синтеза стали крупномасштабные неустойчивости. Эти неустойчивости накладывают жесткие ограничения на максимальные ток и давление, которые можно удержать магнитным полем. Для того чтобы установить рамки физических возможностей и дать читателю почувствовать физику, связанную с данной проблемой, в гл. 1 описаны экспериментальные наблюдения крупномасштабных неустойчивостей тороидальной плазмы, удерживаемой магнитным полем. Даны они приблизительно в том порядке, в котором они и наблюдались, без каких-либо попыток расставить их согласно какой-то теоретической схеме. Вся остальная часть книги посвящена изучению этих неустойчивостей с использованием простейшего, но вполне допустимого приближения — магнитогидродинамической модели (МГД). Заметный акцент будет сделан на изучении того класса установок для удержания плазмы, который называется токамаком и описан ниже. Более детальное описание экспериментальных наблюдений неустойчивостей на токамаках и некоторое сравнение теории и эксперимента дано в гл. 11.

Подробное содержание книги приводится в § 1.3. Заканчивается каждая глава специально подобранным списком литературы с аннотациями. Разбросанные по основному тексту вопросы призваны стимулировать интерес у читателя, а также расширить рамки книги. В большинстве случаев на эти вопросы можно ответить, сделав не более страницы вычислений, хотя некоторые из них и

непростые. Ответы и указания приведены в Приложении. Объяснение специальных терминов, используемых в теории МГД-неустойчивости, можно найти в словаре, помещенном в конце книги. За исключением специально оговоренных случаев, во всей книге используется Международная система единиц (СИ). Все электрические токи и заряды будут учитываться в явном виде, так что потребуются только вакуумные магнитная и диэлектрическая проницаемости. Для удобства индекс «0» у этих величин опущен:

$$\begin{aligned}\mu &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м } [B \cdot c / (A \cdot m)], \\ \epsilon &= 8,854 \cdot 10^{12} \text{ Ф/м } [Кл / (B \cdot m)].\end{aligned}$$

§ 1.1. ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

В первых экспериментальных попытках создать условия, необходимые для управляемого термоядерного синтеза, предпринятых в начале 50-х годов, в столбе ионизованного газа возбуждался большой ток для нагрева и удержания плазмы [16—18]. Ток создает вокруг плазменного шнура магнитное поле, которое термоизолирует горячую плазму от стенки и создает направленную внутрь радиальную силу, удерживающую давление плазмы. Существует по меньшей мере два механизма нагрева плазмы током. Во-первых, это омический нагрев за счет внутреннего сопротивления плазмы электрическому току. Во-вторых, когда магнитное поле увеличивается достаточно быстро, оно создает ударную волну, движущуюся к центру плазменного шнура, сгребая частицы на своем пути и передавая свой импульс ионам, которые затем термализуются в горячей плотной сердцевине плазменного шнура. Эти процессы омического нагрева и нагрева ударными волнами и сейчас все еще широко используются.

Вопрос 1.1.1. Отношение газокинетического давления плазмы к магнитному давлению

$$\beta \equiv 4,03 \cdot 10^{-16} \frac{n \text{ [см}^{-3}\text{]} T \text{ [кэВ]}}{(B \text{ [Тл]})^2}, \quad (1.1.1)$$

где n — полное число частиц (ионов и электронов) в 1 см^3 . В настоящее время задачей термоядерного синтеза является получение температуры 10 кэВ и плотности 10^{14} см^{-3} , которые удерживались бы около секунды. Каково при этом давление, выраженное в атмосферах? Если бы магнитное давление было равно газокинетическому давлению ($\beta=1$), то каким должно было бы быть магнитное поле на поверхности плазмы? Должно ли это давление в конечном счете восприниматься окружающей конструкцией?

Основная проблема, с которой столкнулись в этих ранних экспериментах, заключалась в том, что плазменный шнур самопроизвольно пережимал сам себя в процессе, который стал известен как «сосисочная» неустойчивость моды $m=0^*$ (рис. 1.1, а). Механизм этой неустойчивости очень простой. Если есть возмущение, которое немного сужает часть плазменного шнура, в то

* В отечественной литературе используется термин «перетяжки». — *Примеч. ред.*

время как остальная часть немного расширяется, то продольный ток, проходящий через меньшую площадь поперечного сечения, в месте сужения создает более сильное полоидальное магнитное поле, в то время как поле вокруг расширенной части становится слабее. Более сильное поле в месте каждого сужения создает и большую силу, направленную внутрь плазмы, так что шнур в этом месте сужается и дальше. Последующее быстрое изменение магнитного поля в каждом сужении индуцирует сильное продольное электрическое поле, которое ускоряет ионы в плазме до энергий в сотни килоэлектронвольт. Этот процесс проанализирован в прекрасно написанной экспериментальной работе Андерсона и др. [20]. Полу-чающаяся в результате вспышка нейтронов оказывается короткоживущей, а неустойчивость быстро выбрасывает плазму на стенку, и температура плазмы падает. Надтепловые ионы, ускоренные, по-видимому, подобного типа неустойчивостями, и привели к преждевременному заявлению об успешном осуществлении управляемого термоядерного синтеза [19]. Однако сейчас уже общеизвестно, что для получения положительного выхода термоядерной энергии такие мощные неустойчивости должны быть подавлены.

Неустойчивость типа перетяжек можно легко заставить стабилизировать, если поместить плазменный шнур в продольное магнитное поле, сравнимое по величине с полоидальным полем вокруг шнура. Такой стабилизирующий механизм проще всего понять, если заметить, что любое сужение плазменного шнура требует энергии на сжатие продольного магнитного поля внутри плазмы. Как будет показано в гл. 2, можно считать, что магнитное поле в проводящей жидкости оказывает давление в перпендикулярном к силовым линиям направлении и создает натяжение вдоль силовых линий. Сжатие продольного поля внутри плазмы приводит к появлению возвращающей силы, связанной с увеличением магнитного давления.

Однако даже при наличии умеренного продольного магнитного поля возникает новая неустойчивость, при которой плазменный шнур приобретает винтовую структуру, подобную штопору, как показано на рис. 1.1, б. Причина этой *винтовой неустойчивости* $m=1$ становится ясной, если заметить, что при изгибании плазменного шнура полоидальное поле на внутренней стороне изгиба становится больше, чем поле на внешней стороне. В результате

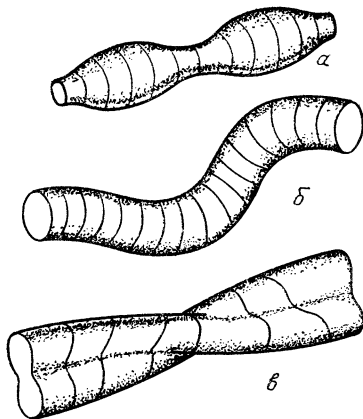


Рис. 1.1. Неустойчивости перетяжек $m=0$ (а); винтовая неустойчивость $m=1$ (б) и винтовая неустойчивость $m=2$ (в) в цилиндрическом плазменном шнуре круглого сечения. Сплошные линии показывают контуры сечений, а не магнитные силовые линии

магнитное давление заставляет шнур изгибаться и дальше и быстро выбрасывает плазму в направлении стенки. С несколько другой точки зрения эта неустойчивость будет описана в гл. 6. В трудах Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии, проходившей в Женеве в 1958 г., приведено несколько превосходных фотографий этой неустойчивости (см. [5]). Эта конференция явилась началом широкой публикации работ по управляемому термоядерному синтезу после рассекречивания этой тематики.

Для того чтобы заставить винтовую моду $m=1$, продольное магнитное поле должно быть достаточно сильным, а плазменный шнур достаточно толстым, чтобы между плазмой и стенкой не было магнитных силовых линий, замыкающихся самих на себя при одном обходе вдоль плазменного шнура. Это условие известно как критерий устойчивости Крускала — Шафранова. Грубо говоря, натяжение, связанное с продольным магнитным полем, препятствует извиванию плазменного шнура. В § 6.1 дано более подробное описание этого стабилизирующего механизма. Для заданного продольного магнитного поля критерий Крускала — Шафранова налагает жесткие ограничения на ток, который можно пропустить через плазменный шнур.

Вопрос 1.1.2. Для тороидальной плазмы малого радиуса r , большого радиуса R (обычно $R/r \geq 3$) с тороидальным полем $B_{\text{тор}}$ (направленным вдоль большого обхода) и полоидальным полем $B_{\text{пол}}$ (вдоль малого обхода) критерий Крускала — Шафранова требует, чтобы на краю плазмы

$$q \approx \frac{rB_{\text{тор}}}{RB_{\text{пол}}} > 1. \quad (1.1.2)$$

(Смысл величины q будет обсужден в гл. 4.) Обычно значение q должно быть масштаба 3, чтобы устранить дополнительную внутреннюю неустойчивость, которая ухудшает удержание плазмы. Предположим, что плазма с параметрами, указанными в вопросе 1.1.1, удерживается только полоидальным магнитным полем, а вакуумное тороидальное магнитное поле предназначено только для устойчивости. Насколько большим должно быть $B_{\text{тор}}$? Какое магнитное давление оказывает $B_{\text{тор}}$ на катушки, которые создают $B_{\text{тор}}$? Можно ли создать такое поле?

В течение 60-х годов основное внимание было приковано к выяснению причин плохого удержания плазмы в тороидальных системах. Поскольку удержание, наблюдаемое в экспериментах, было гораздо хуже рассчитанного на основе простых моделей столкновений отдельных частиц, стали считать, что плазму поперек магнитного поля выносят мелкомасштабные неустойчивости. Теоретические исследования МГД-неустойчивостей в это время были сосредоточены на изучении локализованных неустойчивостей, и для поиска устойчивых плазменных конфигураций были разработаны весьма элегантные математические методы. Для контроля точной формы и профиля плазменного шнура в этот период было выполнено множество экспериментов с тщательно разработанной сложной геометрией магнитного поля. Однако наиболее успешные эксперименты были сделаны на ряде установок, названных *токамаками*, которые были построены в Институте атомной энергии

им. И. В. Курчатова в Москве и основаны на простом омическом нагреве толстого плазменного шнура, помещенного в сильное тороидальное магнитное поле. Поскольку сейчас токамаки находятся в центре исследований по управляемому термоядерному синтезу во многих лабораториях во всем мире и так как они составляют основную тему этой книги, имеет смысл в следующем параграфе описать токамаки и их неустойчивости более подробно.

§ 1.2. ТОКАМАКИ

Основные элементы токамака были известны уже в 1958 г. [5], но результаты в то время не производили впечатления. В серии установок, построенных в ИАЭ им. И. В. Курчатова, были постепенно увеличены размеры, мощность, длительность импульса, причем это осталось незамеченным остальным миром. Поворотный пункт наступил, когда физики западных стран после Новосибирской конференции МАГАТЭ 1968 г. обратили внимание на советские токамаки и когда в 1969 г. Л. А. Арцимович прочел серию лекций в Соединенных Штатах Америки. Несколько позже, в том же году, группа английских физиков, которая привезла в ИАЭ им. И. В. Курчатова оборудование для диагностики по лазерному рассеянию, подтвердила утверждения советских физиков о высокой температуре и сравнительно длительных временах удержания энергии [39]. В Принстоне в течение одного года стелларатор-С был переделан в токамак, и в дальнейшем токамаки были построены в лабораториях всего мира. В 70-х годах для изучения плазмы токамака был использован весьма широкий набор диагностик, а кроме того, исследовался широкий диапазон режимов работы — особенно методы дополнительного нагрева. Была получена плазма с ионной температурой до 2 кэВ, плотностью порядка 10^{14} част./см³ и временем удержания энергии около 20 мс*. Докладывалось также о получении в разных условиях больших плотностей и времен удержания.

Токамак, по существу, представляет собой трансформатор, который возбуждает ток в толстой осесимметричной тороидальной плазме, помещенной в сильное магнитное поле (рис. 1.2). Термин «токамак» является русским сокращением слов «ток максимальный»^{*2}. Как правило, плазма окружена двумя стенками. Первая стенка обычно сделана из тонкой нержавеющей стали с керамическими разъемами или представляет непрерывную конструкцию из сильфонов с высоким сопротивлением, так что основная часть тока протекает по плазме, а не по стенке. Было установлено, что нержавеющая сталь дает меньше примесей в плазму, чем керамика, стекло или кварц. Чтобы зафиксировать апертуру плазмы и пре-

* В настоящее время на токамаке PLT в Принстоне достигнута температура 7 кэВ. — *Примеч. ред.*

^{*2} Одна из удачных по смыслу интерпретаций термина. Действительное происхождение термина следующее: тороидальная камера и магнитная катушка. — *Примеч. ред.*

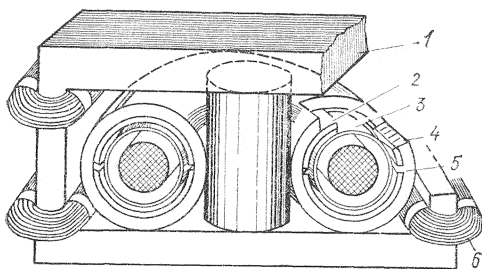
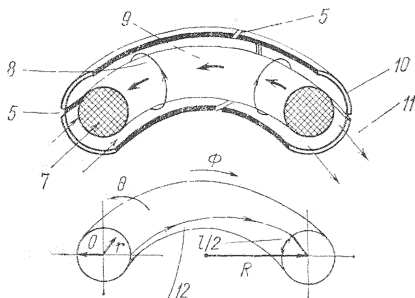


Рис. 1.2. Схема токамака [6]:
 1 — замыкающий магнитопровод;
 2 — медный стабилизирующий кожух;
 3 — лайнер из нержавеющей стали;
 4 — катушки тороидального поля;
 5 — изолирующий разрез;
 6 — обмотки первичной цепи;
 7 — плазма; 8 — полоидальное магнитное поле $B_{\text{пол}}$; 9 — ток плазмы I ; 10 — стабилизирующий медный кожух; 11 — тороидальное магнитное поле $B_{\text{тор}}$; 12 — силовые линии магнитного поля



дохранить первую стенку от убегающих электронов, которые в разрядах с низкой плотностью могут легко прожечь дырки даже в тугоплавких материалах, используется диафрагма из тугоплавких материалов, таких, как молибден или вольфрам. Большую роль в

в установлении характеристик разряда в токамаке играют примеси, и подготовка первой стенки представляется неким таинством. Например, перед каждой серией экспериментов на токамаке первая стенка «чистится разрядом» с сильно неустойчивой плазмой при уменьшенных мощности разряда и тороидальном поле, а для мягкой очистки, не разрушающей молекулярные комплексы типа CH_4 и H_2O , разрядами с низкой температурой.

Кроме первой вакуумной стенки большинство токамаков оснащено толстым медным или алюминиевым кожухом, который помогает центрировать плазменный шнур. Как будет показано в гл. 4, плазменный шнур стремится расширяться по большому радиусу за счет сил, связанных с давлением плазмы, диамагнетизмом и полоидальным полем. При наличии проводящего кожуха любое смещение плазмы наводит токи отражения и создает возвращающую силу. Плазма фактически опирается на проводящий кожух. В дополнение к этому нужны обмотки полоидального или вертикального поля (эти обмотки проходят вдоль большого обхода тора концентрично плазменному шнуру), чтобы помочь центрировать плазму, так как токи отражения в проводящем кожухе затухают. В некоторых токамаках проводящий кожух полностью заменен обмотками полоидального поля, которые включены в чувствительную систему обратной связи. Если используется проводящий кожух, то он должен иметь изолирующие разрезы для того, чтобы магнитный поток и электрические поля могли проникать в плазму.

Вопрос 1.2.1. При изменении с заданной скоростью магнитного потока, проходящего через разомкнутую проволочную петлю, напряжение на разрезе проволочки равно скорости изменения магнитного потока через петлю, взятую с обратным знаком. Пусть меняется поток через замкнутую петлю конечного сопротивления. Каково напряжение между двумя точками на петле?

Вопрос 1.2.2. В токамаке все электрическое поле, создаваемое трансформатором, сосредоточено в разрезе проводящего кожуха. Как распределено электрическое поле по тороидальной плазме? Может ли плазма оставаться осесимметричной, несмотря на разрез в кожухе?

Весь комплекс, состоящий из плазмы, кожуха, а во многих токамаках и обмоток полоидального поля, окружен катушками, которые создают сильное тороидальное магнитное поле, необходимое для устойчивости плазмы. Часто эти катушки тороидального поля являются наиболее сложной частью конструкции. В наших интересах сделать тороидальное поле по возможности большим, а аспектное отношение $A=R/a$ сделать по возможности малым (толстый компактный тороидальный шнур), для того чтобы пропустить через плазму максимально возможный тороидальный ток без нарушения условия Крускала — Шафранова. (Могут быть и другие преимущества низкого аспектного отношения, а также сильного поля.) Обмотки полоидального поля наиболее эффективны, когда они расположены близко к плазме, но сцепленность двух систем обмоток делает очень трудными монтаж и ремонт установки. Катушки тороидального поля, в свою очередь, должны быть расположены вдоль тора близко друг к другу, чтобы уменьшить гофрировку поля, но тогда остается очень мало места для диагностики, инъекции нейтральных пучков и соответствующих силовых конструкций. Каждая установка токамак является компромиссом между этими противоречивыми требованиями.

Обычно плазменный разряд поддерживают в течение нескольких времен удержания энергии, и поэтому профили температуры, плотности тока, плотности частиц и др. определяются балансом между нагревом и поступлением частиц и процессами переноса, которые, к сожалению, до сих пор не очень хорошо поняты. Из ряда возможностей плазма как бы сама выбирает свою форму сечения и профиль. Критерий Крускала — Шафранова и предел по убегающим электронам ограничивают тороидальный ток на слишком низком уровне, чтобы только за счет омического нагрева достичь температуры 5—10 кэВ, необходимой для управляемого термоядерного синтеза. Поэтому большие усилия были затрачены на исследование других методов нагрева плазмы в дополнение к омическому нагреву. К моменту написания книги уже было достигнуто удвоение ионной температуры до 2 кэВ с помощью инъекции нейтральных пучков высокой энергии, которые проходят через магнитное поле и затем ионизируются и захватываются плазмой*.

Существует по крайней мере пять типов крупномасштабных неустойчивостей, наблюдавшихся на токамаках. Мы уже видели, как перетяжки $m=0$ и винтовые неустойчивости $m=1$ подавляются сильным тороидальным магнитным полем. Но даже при наличии такого сильного поля еще три типа неустойчивого поведения наблюдались на токамаках: неустойчивость срыва, колебания Мирнова и пилообразные колебания. Они будут описаны здесь приблизительно в том же порядке, в котором они были открыты.

* См. примечание на с. 9.

Неустойчивость срыва, которая наблюдалась по крайней мере еще в 1963 г. [23, 24], представляет резкое и обычно непредсказуемое расширение плазменного шнура, сопровождающееся большим отрицательным пиком напряжения, противоположным напряжению трансформатора. Расширение происходит в течение нескольких сот микросекунд после, казалось бы, нормальной эволюции плазмы, на протяжении десятков или сотен миллисекунд. Малые срывы могут повторяться на протяжении одного и того же разряда, в то время как большой срыв обычно обрывает разряд. Как мы увидим, срывов можно вообще избежать.

Неустойчивость срыва — это символическое название для комплекса заведомо сложных явлений с целым рядом характерных свойств. Непосредственно перед каждым срывом наблюдаются нарастание и переплетение винтовых возмущений плазменного шнура. К сожалению, это не может служить предупреждением об угрозе срыва, так как приблизительно такая же картина часто существует без срыва. Жесткое рентгеновское излучение внезапно исчезает и обычно не наблюдается снова до конца разряда (возможно, из-за потери убегающих электронов). Имеются указания, что неожиданно теряются и примеси. При внезапном расширении профилей электронной температуры и плотности тока по малому радиусу, плазменный шнур резко смещается внутрь по большому радиусу. Еще более любопытные явления будут обсуждаться в гл. 11.

На рис. 1.3 показаны две фотографии неустойчивости срыва на токамаке АТС (адиабатическое тороидальное сжатие), сделанные Якобсеном [35]. Оптическое изображение на рис. 1.3 получено с помощью высокоскоростной кинокамеры, направленной тангенциально к плазменному шнуру. На 13 мс можно увидеть чрезвычайно сильный срыв, при котором плазма расширяется за 100 мкс и сильно взаимодействует с диафрагмой. Виден только край плазмы, так как центр слишком горячий и сильно ионизован и практически не излучает в видимой части спектра. Видны также резкий отрицательный пикок напряжения (показанный перевернутым) и увеличившиеся возмущения магнитного поля, измеренные на краю плазмы. Есть также небольшие усиления яркости свечения плазменного шнура, сопровождаемые другими вспышками магнитной активности, как, например, на 12,2 мс. На рис. 1.3 (внизу) показана развертка, полученная с помощью быстро движущейся фото-пленки, проходящей мимо щели, смотрящей через плазменный шнур внутрь по большому радиусу, или с помощью вращающегося зеркала. Эффективное время разрешения на этой фотографии равно 15 мкс. Приблизительно после 12 мс появляется ясная винтовая структура, соответствующая моде $m=3$, $n=1$ (на любом замкнутом контуре по малому обходу имеется три лепестка, закрученные так, что вдоль любого контура по большому обходу вокруг плазменного шнура есть только один лепесток, вращающийся мимо щели с частотой 8,5 кГц). На 17,1 мс произошел большой срыв, после которого винтовая структура стала некоторое время не видна (воз-

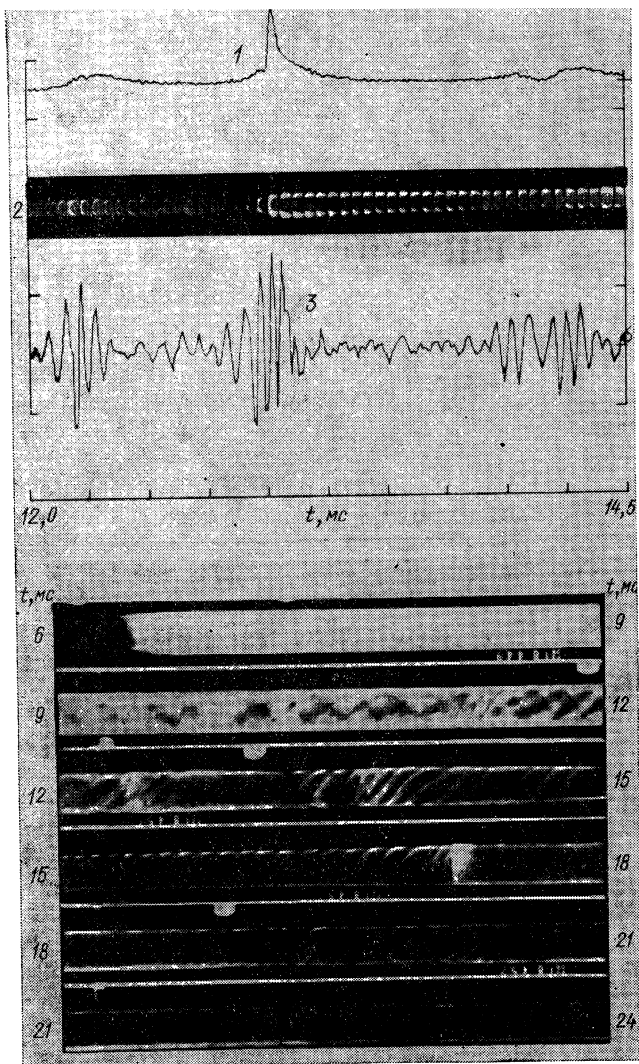


Рис. 1.3. Высокоскоростная фотосъемка и скоростная фоторазвертка, показывающие винтовую структуру и неустойчивость срыва на токамаке АТС в Принстоне. Сигнал напряжения показан непосредственно над ними [35]:

1 — сигнал напряжения обхода; 2 — оптическое изображение плазменного тора в экваториальной плоскости; 3 — сигнал поперечного магнитного зонда

можно, потому, что неустойчивость нагрела первоначально холодную плазму на краю шнура). Ясно видно, что плазма очень быстро расширилась. Все показанные здесь срывы были все же достаточно слабыми, и плазменный разряд после них восстанавливался.

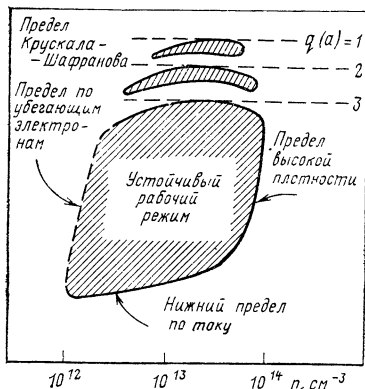


Рис. 1.4. Типичная диаграмма рабочих режимов токамака для продольного тока и плотности плазмы [6]

увеличении плотности плазмы разряд становится все более подверженным неустойчивостям срыва. Это приводит к появлению у области рабочих параметров эффективного верхнего предела по плотности. Этот верхний предел по плотности снижается при уменьшении тороидального тока, по-видимому, из-за того, что радиальный размер плазменного шнура сокращается, так как при малом токе нельзя обеспечить прогрев плазмы вплоть до диафрагмы. Наконец, при низкой плотности слишком много электронов уходит в «просвист», свободно ускоряясь тороидальным электрическим полем, практически не испытывая соударений. В конце концов они поглощают большую часть вложенной энергии, оставляя плазму холодной и вызывая значительные повреждения при столкновении с диафрагмой или стенкой. Можно полностью устранить неустойчивости срыва и достичь оптимального режима, если работать в пределах этого острова параметров.

Сейчас общепризнано, что неустойчивость срыва — это наиболее опасная и наиболее загадочная из неустойчивостей, наблюдаемых в токамаках. То, что она возникает совершенно непредсказуемо и развивается очень быстро, делает ее очень трудной для изучения — как экспериментально, так и теоретически. По этой причине она представляет одно из наименее понятых явлений в токамаках. Некоторые дополнительные наблюдения и попытка их теоретического объяснения будут даны в гл. 11.

Вопрос 1.2.3. Как будет показано в § 4.7, магнитная энергия $1/2 \mu \int B^2 d^3x$ тороидального плазменного кольца приблизительно равна магнитной энергии прямолинейного плазменного цилиндра с радиусом, равным малому радиусу тороидальной плазмы, и который окружен кожухом, несущим обратный ток, с радиусом, равным большому радиусу тороидального шнура. Предположим, что тороидальный ток зафиксирован, а малый радиус плазмы (профиль тока) расширяется при уменьшении большого радиуса. Как меняется магнитная энергия?

Колебания Мирнова. При нормальных условиях работы токамака на границе плазменного шнура можно обнаружить малые

Режим работы токамака можно изобразить как маленький остров в пространстве параметров. Рассмотрим, например, схематическую иллюстрацию (рис. 1.4) границ тороидального тока в зависимости от плотности частиц для токамака в общем случае. При увеличении тороидального тока, когда q падает ниже 3, наблюдается уменьшение времени удержания, сопровождаемое большими винтовыми возмущениями магнитного поля, которое, когда q на краю плазмы становится ниже 1 (предел Крускала — Шафранова), соответствует полной потере плазмы в результате неустойчивости винтовой моды $m=1$. При

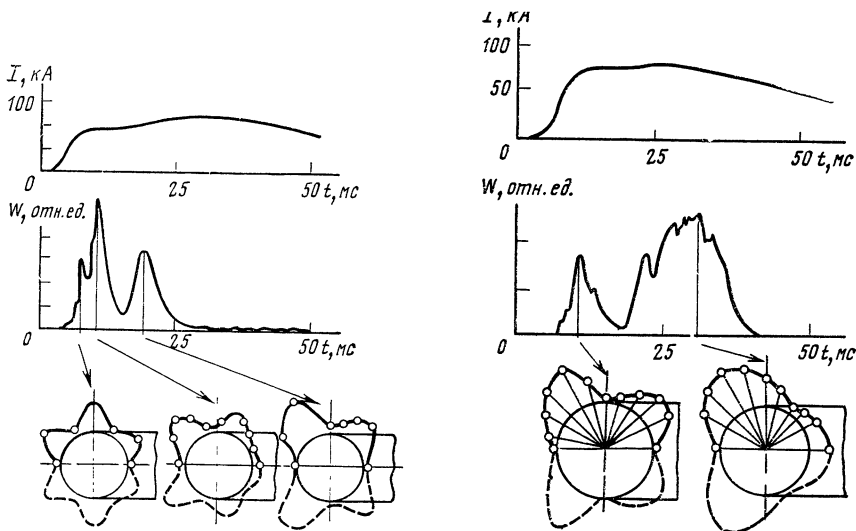


Рис. 1.5. Эволюция колебаний Мирнова в токамаке Т-3 (ИАЭ им. И. В. Курчатова). Осциллограммы показывают ток (I) и сигнал колебаний магнитного поля (W). Нижепод ними приведены пространственные картины винтовых возмущений магнитного поля в поперечном сечении на краю плазмы [29]

осциллирующие винтовые возмущения полоидального магнитного поля, называемые колебаниями Мирнова. Особенно отчетливы эти колебания в начале разряда, когда они быстро эволюционируют во времени, проходя через серию полоидальных волновых чисел, начиная часто с $m \geq 6$ и доходя до $m = 2$ или 3 , как это показано на рис. 1.5 из работы [29]. Обычно винтовые возмущения имеют тороидальное волновое число $n = 1$. Возмущения максимальны по величине и имеют регулярную структуру на внешней стороне тора. Иногда в одно и то же время присутствует несколько гармоник, часто сцепленных по фазе, а иногда структура не является чисто синусоидальной ни в пространстве, ни во времени.

После прохождения через эту начальную последовательность мод колебания обычно превращаются в отдельную моду, стационарную или со слабо меняющейся амплитудой, которая осциллирует на частоте порядка 10 кГц. Эти колебания, по-видимому, являются результатом вращения винтовой структуры в направлении диамагнитного дрейфа электронов, если температура в токамаке высока, или в противоположную сторону в токамаках с $T_e \leq 100$ эВ. Пока не выяснено, является ли направление вращения тороидальным или полоидальным — возможно, что оно тороидальное. Скорость вращения уменьшается, когда амплитуда возмущений начинает нарастать, особенно непосредственно перед срывом. При желании вращение можно остановить, накладывая винтовые возмущения с помощью внешних обмоток. Однако амплитуда при такой

процедуре обычно не затрагивается, что хорошо видно при включении и выключении внешнего возмущения.

Если амплитуда колебаний Мирнова становится больше одного процента от поля тока, время удержания энергии плазмы падает, а общее электрическое сопротивление увеличивается. Вообще амплитуда колебаний становится больше в разрядах с большим током, высоким содержанием примесей и высокой плотностью. Однако предыстория разряда также сказывается на амплитуде колебаний. Например, С. В. Мирнов и И. Б. Семенов [29] обнаружили, что колебания $m=2$ становятся чрезмерно большими, когда тороидальный ток увеличен так, что q вблизи границы плазмы приближается к 2. Но если наложить всплеск тока, чтобы быстро пройти через барьер $q=2$, то амплитуда колебаний остается на приемлемо низком уровне. Амплитуда колебаний, по-видимому, чувствительна к профилю тока и нечувствительна к положению проводящей стенки, если только стенка находится не непосредственно у границы плазмы. Однако так как нет прямого способа для измерения профиля тока в высокотемпературной плазме токамака, об этом профиле можно судить только по неполным данным (например, предположив, что электрическое поле однородное, а проводимость — спитцеровская с некоторым разумным профилем примесей). Отсутствие надежных диагностик и то обстоятельство, что не полностью поняты процессы переноса, по-видимому, играют большую роль в медленной эволюции колебаний Мирнова, делают чрезвычайно трудной надежную стыковку теории и эксперимента.

Вопрос 1.2.4. Можно ли восстановить винтовое возмущение тока внутри плазмы, имея достаточно подробные измерения винтовых возмущений магнитного поля вне плазмы? Можно ли определить радиус r_0 для возмущения тока вида $\delta(r-r_0)\sin(m\theta-kz)$ в цилиндрическом плазменном шнуре из измерений поля вне плазмы?

Пилообразные колебания. Применение скоростной фотосъемки и измерения магнитных возмущений все яснее показывали, что внутри нормальной плазмы токамака имеются внутренние винтовые структуры. Дальнейшие указания на наличие внутренней структуры поступили при зондировании плазмы ионными пучками [36], микроволнами и зондами, которые можно было вводить в небольших токамаках с более холодной плазмой. Однако возможности этих методов измерений ограничены, и они трудны для повседневного использования. В области диагностики произошел прорыв, когда фон Гёллер, Стодрик и Саутоф [34] впервые использовали поверхностно-барьерные кремниевые детекторы для наблюдений регулярных колебаний на мягком рентгеновском излучении из плазмы. Этот чувствительный диагностический метод обнаружил, что внутри обычной плазмы токамака имеется значительный уровень разнообразных неустойчивых переменчивых движений.

Термин «мягкое рентгеновское излучение» обычно применяется к рентгеновским лучам с энергией от 2 до 20 кэВ, в то время как

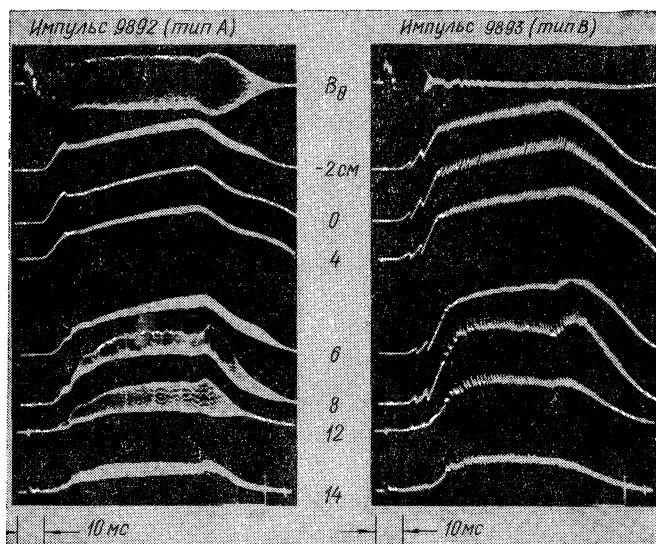


Рис. 1.6. Осциллограммы колебаний Мирнова (вверху) и рентгеновские сигналы, полученные с разных хорд сечения плазмы, для двух типов разряда в ОРМАК ($I=155$ кА, $B_T=21,6$ кГс, $q_a=4,6$, $p=4,1 \cdot 10^{-4}$ мм рт. ст.)

«жесткое излучение» соответствует энергии выше 100 кэВ. Большая часть мягкого рентгеновского излучения исходит от электронов при их захвате ионами примесей (переход из свободного в связанное состояние), меньшая обязана спектральным линиям примесей (переход с уровня на уровень) и, наконец, совсем малая доля исходит из *тормозного излучения* (переход между свободными состояниями) — особенно у водорода. Обычно рентгеновское излучение более низкой энергии отфильтровывают, так как оно связано со спектральными линиями излучения, которые слишком чувствительны к деталям ионизационных состояний и составу плазмы. Излучение очень большой энергии, источником которого являются убегающие электроны, свободно проходит через детектор. Так как основная часть рентгеновского излучения исходит из наиболее горячей и плотной части плазмы, в сигнал каждого детектора наибольший вклад дает та часть луча зрения, которая проходит ближе всего к центру плазмы. Разрешение от хорды к хорде составляет обычно 1 см.

На токамаках наблюдается два основных типа рентгеновских сигналов: винтовые структуры, соответствующие колебаниям Мирнова, и совершенно другой тип сигнала, названный *пилообразными колебаниями*. Яркие примеры этих двух типов сигналов, полученные на токамаке ОРМАК в Ок-Риджской национальной лаборатории, показаны на рис. 1.6, где верхняя осциллограмма представляет возмущения магнитного поля (B_θ), зафиксирован-

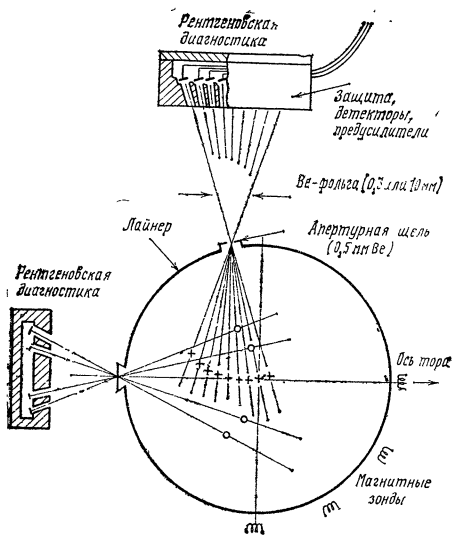


Рис. 1.7. Схема рентгеновской диагностики и зондов для измерения dB/dt в Ормак в Ок-Риджской национальной лаборатории

ные на границе плазмы, а семь других осциллограмм являются рентгеновскими сигналами, полученными с различных хорд плазменного шнура, проходящих на расстоянии $-2, 0, 4, 6, \dots$ см от магнитной оси (радиус диафрагмы 26 см), как это схематически показано на рис. 1.7. В случае, показанном здесь, при приблизительно одинаковых условиях в токамаке получались два разительно отличающихся разряда. Если условия заметно различаются, то предпочтителен какой-то один тип разряда. Осциллограммы покрывают весь временной интервал существования разряда, причем первые 20 мс соответствуют быстро меняющемуся поведению на начальной стадии, последние 35 мс показывают

более медленный процесс распада, а между ними находится состояние с приблизительно стационарными условиями (от 20 до 70 мс).

В типе разряда, показанном слева на рис. 1.6, имеются сильные колебания Мирнова с $m=2, n=1$ и соответствующие колебания рентгеновского излучения на той же частоте, которое сосредоточено достаточно далеко от центра плазмы. Иногда наблюдаются винтовые структуры $m=3, n=1$ и имеются указания, что время от времени одновременно существуют две или более винтовых структур с максимумами амплитуд на разных радиусах. Наибольшая амплитуда колебаний $m=2$ видна, когда токамак работает при высоких плотностях и токе и особенно — непосредственно перед неустойчивостью срыва. Переворот фазы структуры $m=2$ наблюдается на двух радиусах. Между ними форма волны искажается — часто в синусоидальную волну с обрезанными вершинами или впадинами.

Более интересное явление пилообразных колебаний лучше всего наблюдать, когда амплитуда колебаний Мирнова мала, как справа на рис. 1.6. Пилообразные колебания состоят из осесимметричных пульсаций $m=0$ и $n=0$ рентгеновского сигнала с колебаниями $m=1, n=1$, сидящими на их вершинах. Вблизи центра разряда зубцы представляют медленный подъем, за которым следует резкий спад, повторяющийся с периодом порядка 1 мс. Вне поверхности, которую связывают с $q=1$, картина переворачивается — каждый зубец имеет ступенчатый подъем, за которым

следует экспоненциальный спад, причем крутизна подъема уменьшается при удалении от поверхности $q=1$. Начало подъема внешнего зубца точно синхронизовано со спадом во внутреннем зубце. Период пилообразных колебаний увеличивается при увеличении амплитуды колебаний и при росте плотности плазмы. Группа TFR [32] обнаружила, что колебания сильно скоррелированы с флуктуациями плотности. Пилообразные колебания обычно становятся сильнее, если увеличивать ток, пропускаемый по плазме, что показано на рис. 1.8.

Амплитуда сигнала $m=1$, сидящего на вершине пилообразных колебаний, наибольшая в окрестности поверхности $q=1$. Однако амплитуда сигнала $m=1$, по-видимому, не связана прямо с интенсивностью пилообразных колебаний; иногда имеется только маленький всплеск моды $m=1$ на острие внутреннего зубца, а иногда зубец представляет только слабую модуляцию сильного колебания $m=1$. Вообще же мода $m=1$ растет по мере роста внутреннего зубца и почти исчезает сразу после спада.

§ 1.3. СОДЕРЖАНИЕ КНИГИ

Эта книга в первую очередь посвящена изучению крупномасштабных неустойчивостей в токамаках на основе простейшей из приемлемых математических моделей — модели магнитной гидродинамики (МГД). Чтобы показать реальную картину явлений, обсуждаемых в остальной части книги, в гл. 1 было приведено описание основных крупномасштабных неустойчивостей, экспериментально наблюдаемых на токамаках.

В гл. 2 представлена модель идеальной магнитной гидродинамики. МГД-уравнения записаны там в нескольких разных представлениях, чтобы прояснить их физический смысл. Обсуждаются свойства магнитного поля и показано, что магнитное поле можно рассматривать как замороженное в идеально проводящую жидкость, так что силовые линии не могут размыкаться или менять топологию, пока движение жидкости не имеет разрывов. Это фундаментальное ограничение в идеальной МГД-модели сильно влияет на множество исследуемых явлений. Наконец, поскольку МГД-уравнения как первое приближение часто используются в условиях, когда их применение уже нельзя оправдать, для чита-

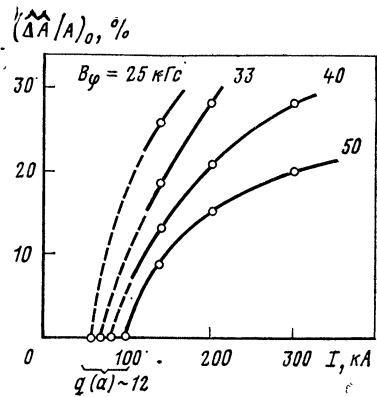


Рис. 1.8. Интенсивность пилообразных колебаний как функция торондального тока для разных значений магнитных полей в токамаке TFR в Фонтено-О-Роз (Франция) [32]. Точки — результаты эксперимента

теля важно уметь оценивать эффекты, которые опущены в этой модели. Такие оценки приведены для эффектов конечного электрического сопротивления, вязкости, теплопроводности и диффузии.

В гл. 3 изучается неустойчивость Рэля — Тейлора в геометрии плоского слоя как простейшая из возможных иллюстраций множества методов, используемых для исследования МГД-неустойчивостей.

Формальная теория статического МГД-равновесия развита в гл. 4. Особое значение имеет представление о вложенных магнитных поверхностях и величинах, таких, как q , которые постоянны на каждой из этих поверхностей. Кроме того, приведен часто используемый метод сведения векторных уравнений равновесия к одному дифференциальному уравнению в частных производных для геометрии с одной игнорируемой (циклической) координатой. Затем разработаны примеры для равновесия цилиндрической плазмы с вытянутым поперечным сечением, а также для вертикального поля, необходимого для удержания тороидальной плазмы.

Математический формализм линеаризованных МГД-уравнений и энергетический принцип выведены в гл. 5. Для удобства дальнейшего использования энергетический принцип записан в нескольких различных представлениях.

В гл. 6—8 в постепенно усложняющейся геометрии изучаются линейные МГД-неустойчивости. В гл. 6 рассматривается прямолинейный цилиндрический плазменный шнур круглого сечения с условиями периодичности на торцах. Практически все неустойчивости, которые будут найдены в замкнутой тороидальной плазме, здесь трактуются в упрощенной форме. Чтобы прояснить различие между неустойчивостями, связанными с давлением, током, неустойчивостями с закрепленной и со свободной границей, здесь используется комбинация физических моделей, аналитических оценок и численных расчетов.

Гл. 7 по тороидальным неустойчивостям разделена на две части. Первая содержит полный вывод критерия устойчивости Мерсье с использованием координат Хамады. Этому выводу отведено значительное место, так как это прекрасный пример аналитических методов, которые часто используются в литературе по линейным МГД-неустойчивостям. Вторая часть гл. 7 представляет обзор числовых результатов по крупномасштабным неустойчивостям осесимметричных тороидальных конфигураций.

В управляемом термоядерном синтезе одним из открытых для теоретиков является вопрос о максимальном давлении, которое можно удержать в токамаке, и о том, как увеличить максимальное давление. В гл. 8 рассматриваются два предложения для увеличения давления в токамаках. В первом методе предлагается вытягивать сечение плазменного шнура, чтобы увеличить тороидальный ток и удерживаемое давление без нарушения критерия Крускала — Шафранова. Во втором методе используется дополнительный нагрев, чтобы поднять давление более быстро, чем время диф-

фузии магнитного поля. Тогда сохранение магнитных потоков приводит к возбуждению полоидальных токов, которые способствуют удержанию давления плазмы. Очевидно, что применимость обоих методов может быть ограничена за счет неустойчивостей, связанных с давлением, т. е. баллонных неустойчивостей, которые в настоящее время являются предметом интенсивного изучения.

До указанного пункта почти весь материал посвящен неустойчивостям с линейным инкрементом, которые представляют произвольно малое возмущение равновесия. Гл. 9 содержит обзор исследований нелинейной эволюции и последствий этих неустойчивостей. Большая часть этих результатов получена из численных исследований в течение последних нескольких лет.

Добавление малого сопротивления в МГД-модель дает возможность силовым линиям магнитного поля размыкаться и пересоединяться. С этим связан новый класс неустойчивостей, а именно резистивных неустойчивостей, описанных в гл. 10. Есть указания, что эти резистивные неустойчивости оказались намного ближе к экспериментальной действительности в условиях токамака, чем идеальные МГД-неустойчивости.

В гл. 11 сравниваются предсказания теории и экспериментальные наблюдения. Она содержит обзор наиболее важных результатов, показывает связь этих результатов с экспериментальными наблюдениями и указывает направление новых исследований.

§ 1.4. БИБЛИОГРАФИЯ

Для изучающих МГД-неустойчивости полезно иметь сборник избранных публикаций

1. Jeffrey A., Taniuti T. MHD Stability and Thermonuclear Containment. N. Y., Academic Press, 1966.

Замечательная обзорная статья, близкая по духу к настоящей книге, написана Вессоном:

2. Wesson J. A. — Nucl. Fusion, 1978, v. 18, p. 87—132.

Дополнительные обзорные статьи можно найти в серии книг:

3. Вопросы теории плазмы. Вып. 1, 2/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1963; вып. 5, 1967; вып. 6, 1972.

Теоретические методы подробно описаны в лекциях:

4. Mercier C., Luc H. Lectures in Plasma Physics. The MHD Approach to the Problem of Plasma Confinement in Closed Magnetic Configurations. EUR 5127e, Commission of European Communities, Luxembourg.

Серия сборников, представленных МАГАТЭ, является результатом теоретических и экспериментальных исследований по удержанию плазмы:

5. Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958. Избранные доклады иностранных ученых. Т. 1. Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. М.: Атомиздат, 1959. Доклады советских ученых. Т. 1. Ядерная физика.

Труды последующих конференций МАГАТЭ публиковались под названием «Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research» «Физика плазмы и исследования по управляемому термоядерному синтезу». Ссылки на них здесь даются в таком виде: Salzburg IAEA Conf., 1961; Culham IAEA Conf., 1965; Novosibirsk IAEA Conf., 1968; Madison IAEA Conf., 1971; Tokyo IAEA Conf., 1974; Berchtesgaden IAEA Conf., 1976.

Хорошим материалом для знакомства с токамаками является доклад Комиссии по атомной энергии США:

6. WASH — 1295 (1974).

Прекрасными обзорами, рассчитанными на подготовленного читателя, являются:

7. Artsimovich L. A. — Nuclear Fusion, 1972, v. 12, p. 215—252.

8. Furth H. P. — Ibid., 1975, v. 15, p. 487—534.

Наилучшим справочником экспериментальных установок для термоядерного синтеза, существующих во всех лабораториях мира, является

9. World Survey of Major Facilities in Controlled Fusion Research, Nuclear Fusion Special Supplement, IAEA Vienna.

Публикуется после каждой конференции МАГАТЭ начиная с 1969 г.

Многие книги по общим вопросам физики плазмы содержат некоторый материал по МГД-неустойчивостям. Автору приходилось часто использовать:

10. Spitzer L. Physics of Fully Ionized Gases. N. Y., John Wiley (Interscience), 1962.

11. Schmidt G. Physics of High Temperature Plasmas, N. Y., Academic Press, 1966.

12. Krall N. A., Trivelpiece A. W. Principles of Plasma Physics. N. Y., McGraw-Hill, 1973.

(Русский перевод: Кролл Н., Трайвелпис А. Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975).

13. Boyd T. J. M., Sanderson J. J. Plasma Dynamics. N. Y., Barnes and Noble, 1969.

14. Rose D. J., Clark M. Plasma and Controlled Fusion. Cambridge, The MIT Press, 1961.

(Русский перевод: Роуз Д., Кларк М. Физика плазмы и управляемые термоядерные реакции. Пер. с англ. Под ред. Д. А. Франк-Каменецкого М.: Госатомиздат, 1963).

15. Cramer K. R., Pai S.-I. Magnetofluid Dynamics for Engineers and Applied Physicists. N. Y., McGraw-Hill, 1973.

§ 1.5. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Первые эксперименты, стимулировавшие развитие управляемого термоядерного синтеза, описаны в работах:

16. Cousins S. W., Ware A. A. — Proc. Phys. Soc. (Lond.), 1951, v. A-64, p. 159—166.

17. Курчатov И. В. — Атомная энергия, 1956, т. 1, вып. 3, с. 65.

18. Bishop A. Project Sherwood. Reading Mass., Addison—Wesley, 1958.

19. Thonemann P. C. e. a. — Nature, 1958, v. 181, p. 217—233.

Рождение нейтронов во время неустойчивости перетяжек $m=0$ было доказано в работах:

20. Anderson O. A. e. a. — Phys. Rev., 1958, v. 110, p. 1375.

Много исследований неустойчивости $m=1$ представлено на Женевскую конференцию (1958), а кроме того см.:

21. Sawler G. A., Scott P. L., Stratton T. F. — Phys. Fluids, 1958, v. 2, p. 47—51.

Сравнение теории и эксперимента было сделано в работе:

22. Ware A. A. Salzburg IAEA Conf. Nucl. Fusion Suppl., 1962, v. 3, p. 869.

Первые наблюдения неустойчивости срыва были сделаны в работах:

23. Горбунов Е. А., Разумова К. А. — Атомная энергия, 1963, т. 15, с. 363.

24. Арцимович Л. А., Мирнов С. В., Стрелков В. С. — Там же, 1964, т. 17, с. 170.

Из недавних работ по неустойчивости срыва отметим следующие:

25. Karger F. e. a. (Pulsator Group), Berchtesgaden IAEA Conf., 1976, v. 1, p. 267; Tokyo IAEA Conf., 1974, v. 1, p. 207.

26. Власенков В. С. и др. Tokyo IAEA Conf. Nucl. Fusion Suppl., 1974, p. 1—5.

27. Hutchinson I. H. — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 37, p. 338—341.

28. THER Group. — Nucl. Fusion, 1977, v. 17, p. 1283—1296.

Подробнее по колебаниям Мирнова см.:

29. Мирнов С. В., Семенов И. Б. — Madison IAEA Conf. Nucl. Fusion Suppl., 1971, p. 189; Атомная энергия, 1971, т. 30, с. 20; ЖЭТФ, 1971, т. 33, с. 2105.

30. Hosea J. C., Bobeldijk C., Grove D. J. Madison IAEA Conf., 1971, v. 2, p. 425—440.

По вопросам рентгеновских измерений см.:

31. Von Goeler S. 7th Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Lausanne, 1975, v. 2, p. 71.

32. TER Group (Launois D.), Lausanne Conf., 1975, v. 2, p. 1.

33. Smith R. R. — Nucl. Fusion, 1976, v. 16, p. 225.

34. Von Goeler S., Stodiek W., Sauthoff N. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 1201.

Другие диагностики описаны в работах:

35. Jacobsen R. A. — Plasma Phys., 1975, v. 17, p. 547.

36. Jobs F. C., Hosea J. C., Hinov E. 6th Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Moscow, 1973, v. 1, p. 199.

37. Makishima K. e. a. — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 142.

Первоначальный вывод критерия Лоусона был сделан в работе:

38. Lawson J. D. — Proc. Phys. Soc. (Lond.), 1957, v. B 70, p. 6.

См. также:

39. Peacock N. J. e. a. — Nature, 1969, v. 224, p. 488.

Глава 2. МГД-УРАВНЕНИЯ

§ 2.1. ВВЕДЕНИЕ

Сокращение МГД применяется для обозначения магнитной гидродинамики. МГД-модель — это одна из простейших моделей для описания взаимодействия идеально проводящей жидкости и магнитного поля. Уравнения идеальной магнитной гидродинамики выглядят следующим образом:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}; \quad (2.1.1)$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B}; \quad (2.1.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}; \quad (2.1.3)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}; \quad (2.1.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla p - \Gamma p \nabla \cdot \mathbf{v}; \quad (2.1.5)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \rho - \rho \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (2.1.6)$$

В настоящем параграфе дана физическая интерпретация каждого члена в этих уравнениях. В следующих четырех разделах рассмотрены некоторые другие формы записи и интерпретации уравнений. Некоторые наиболее важные физические эффекты, которые не описываются уравнениями идеальной МГД-модели, рассмотрены в § 2.6.

Состояние системы в любой точке пространства и в любой момент времени задается величинами \mathbf{v} , \mathbf{B} , p и ρ , где \mathbf{v} — макроскопическая скорость жидкости; \mathbf{B} — магнитное поле; p — газокINETическое давление и ρ — плотность вещества; МГД-уравнения

описывают изменение этого состояния со временем. Электрическое поле \mathbf{E} , измеряемое в лабораторной системе координат, и плотность тока \mathbf{J} рассматриваются в качестве вспомогательных переменных.

Первое МГД-уравнение описывает ускорение жидкости под действием локальных сил. Конвективная производная

$$d/dt \equiv \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla, \quad (2.1.7)$$

которая появляется в левой части (2.1.1), описывает скорость изменения в точке, движущейся с потоком жидкости. Градиент давления в правой части (2.1.1) можно интерпретировать как силу, возникающую в результате разницы давления на противоположных сторонах бесконечно малого элемента жидкости. Сила $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ возникает в результате сложения сил Лоренца $\sum_i Z_i e \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}$, действующих на отдельные заряженные частицы, из которых состоит плазма ($Z_i e$ — это заряд, \mathbf{v}_i — скорость каждой частицы). Некоторые другие формы записи силы $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ будут рассмотрены в § 2.4. В этой книге термины «плазма» и «идеально проводящая жидкость» будут использоваться как синонимы.

Уравнение (2.1.2) — это закон Ампера, в котором пренебрегается током смещения $\epsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$. Такое магнитоэстатическое приближение справедливо только тогда, когда альфвеновская скорость $v_A \equiv B / \sqrt{\mu \rho}$ много меньше скорости света. Следует отметить, что все электрические токи предполагаются заданными явным образом, так что в этой книге μ обозначает магнитную проницаемость вакуума,

$$\mu \equiv \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}, \quad (2.1.8)$$

у которой индекс «0» для удобства опущен.

Уравнение (2.1.3) — это закон Фарадея, описывающий эволюцию магнитного поля во времени. Дивергенция магнитного поля должна быть равна нулю:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.1.9)$$

Если уравнение $\nabla \mathbf{B} = 0$ используется в качестве начального условия, то согласно закону Фарадея $\nabla \cdot \mathbf{B}$ будет равно нулю в любой момент времени. Электрическое поле, которое появляется в законе Фарадея, представляет собой электрическое поле в лабораторной системе координат. При переходе в систему координат, движущуюся с жидкостью, электрическое поле преобразуется за счет появления дополнительного слагаемого $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Как мы увидим в § 2.2, это преобразование можно вывести из условия инвариантности закона Фарадея по отношению к преобразованиям Галилея (как приближению к релятивистской инвариантности). В дальнейшем будет показано, что уравнение (2.1.4) можно получить с помощью такого преобразования, полагая электрическое поле равным нулю в системе координат, движущейся вместе с идеально проводящей жидкостью. Таким образом, уравнение (2.1.4) — это некоторая специальная форма закона Ома. Движение плазмы из-

меняет магнитное поле в соответствии с законами Фарадея (2.1.3) и законом Ома (2.1.4), в то время как магнитное поле влияет на движение плазмы в соответствии с уравнением движения (2.1.1).

Движение плазмы изменяет давление и плотность среды в соответствии с термодинамическими соотношениями (2.1.5) и (2.1.6). Члены $\mathbf{v} \cdot \nabla p$ и $\mathbf{v} \cdot \nabla \rho$ в правых частях этих уравнений описывают конвективные эффекты. Если в правых частях были бы только эти члены, то давление и плотность любого жидкого элемента не менялись, а просто переносились бы вместе с жидкостью. Слагаемые $\Gamma p \nabla \cdot \mathbf{v}$ и $\rho \nabla \cdot \mathbf{v}$ в этих уравнениях описывают эффект сжатия и расширения. Под действием этих слагаемых давление и плотность изменяются при изменении размеров жидкого элемента. Константа $\Gamma = 5/3$ представляет собой отношение удельных теплоемкостей идеального газа с тремя степенями свободы. (Заглавная буква Γ используется во избежание в дальнейшем путаницы с инкрементом γ).

Два следующих раздела будут посвящены следствиям закона Фарадея (2.1.3) для идеально проводящей жидкости. В частности, будет введено понятие «вмороженности» магнитных силовых линий.

§ 2.2. ПОТОК МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ЗАКОН ФАРАДЕЯ

Магнитное поле можно представить себе как бездивергентное ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) трехмерное векторное поле. Равенство нулю дивергенции магнитного поля означает, что нет ни источников, ни стоков магнитного поля. Однако из этого не следует, что все магнитные силовые линии являются замкнутыми. *Магнитная силовая линия* — это такая линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением магнитного поля. Незамкнутая силовая линия, вообще говоря, покрывает какую-либо поверхность или заполняет объем эргодически. Это означает, что если следовать вдоль силовой линии достаточно долго, то когда-нибудь мы подойдем сколь угодно близко к любой точке той поверхности или объема, где силовая линия эргодична.

Вопрос 2.2.1. Рассмотрим кольцо с током, на оси симметрии которого расположен прямой проводник, по которому также течет ток. В этом случае магнитные силовые линии имеют форму спиралей, охватывающих кольцо. Какая часть силовых линий замкнута, а какая эргодически покрывает тороидальную поверхность?

Поток магнитного поля через данную поверхность

$$\psi \equiv \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}. \quad (2.2.1)$$

Равенство дивергенции магнитного поля нулю (2.1.9) взаимно однозначно соответствует следующим утверждениям.

1. Потоки, входящий в объем и выходящий из него, равны.
2. Через любую поверхность, натянутую на данный замкнутый контур, проходит один и тот же поток.

Чтобы доказать первое утверждение, можно воспользоваться теоремой Гаусса

$$\oint d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.2.2)$$

Для доказательства обратного утверждения следует применить ее к произвольному элементу объема. Что касается второго утверждения, то следует обратить внимание на то, что между любыми двумя поверхностями, натянутыми на один замкнутый контур, имеется замкнутый объем, а затем, как и раньше, можно воспользоваться теоремой Гаусса.

Уравнение $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ фактически является дифференциальной формой условия сохранения потока магнитного поля. Это легко понять, записывая выражение $(\nabla \cdot \mathbf{B}) dx dy dz$ с помощью конечных разностей внутри бесконечно малого параллелепипеда с площадями поверхности граней $dx dy$, $dy dz$ и $dz dx$.

Теперь рассмотрим закон Фарадея (2.1.3). Этот закон вытекает из следующего экспериментального факта. При изменении потока магнитного поля, проходящего через замкнутый проводник, в проводнике возникает электрическое поле, которое дается формулой

$$\oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} = - \frac{d}{dt} \psi. \quad (2.2.3)$$

При этом не важно, по какой причине меняется поток, изменяется ли поле или движется проводник. Проводник, конечно же, можно заменить любым замкнутым контуром.

Рассмотрим случай, когда поле меняется, а контур движется или деформируется. Через бесконечно малый промежуток времени каждый элемент контура сместится на расстояние $\mathbf{v} \cdot dt$, а каждый элемент длины заметет площадь $d\mathbf{l} \times \mathbf{v} \cdot dt$. Поток магнитного поля через новый контур равен потоку через старый контур, за вычетом потока, проходящего через остаток площади, полученный из-за движения контура. Таким образом, полная скорость изменения потока дается выражением:

$$\frac{d\psi}{dt} = \int d\mathbf{S} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \oint d\mathbf{l} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}. \quad (2.2.4)$$

Совместно с (2.2.3) это ведет к

$$\oint d\mathbf{l} [\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}] = - \int d\mathbf{S} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.2.5)$$

Электрическое поле в выражении (2.2.5) — это электрическое поле на движущемся контуре.

Электрическое поле на неподвижном контуре, который совпадает с каким-либо мгновенным положением движущегося контура, равно:

$$\oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}_{\text{нег.о.л.в.}} = - \int d\mathbf{S} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.2.6)$$

Здесь использовали инвариантность закона Фарадея по отношению к преобразованиям Галилея в нерелятивистском приближении. Она проявляется в том, что магнитное поле в любой точке пространства и в любой момент времени не зависит от системы отсчета. Электрическое же поле зависит от скорости, с которой движется наблюдатель. Разницу между электрическими полями в неподвижной точке и движущемся контуре можно получить, сравнивая выражения (2.2.5) и (2.2.6):

$$\mathbf{E}_{\text{неподв}} = \mathbf{E}_{\text{движ}} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (2.2.7)$$

В идеально проводящей плазме электрическое поле равно нулю в системе отсчета, движущейся вместе с любым элементом жидкости. Таким образом, как следует из (2.2.7), электрическое поле в лабораторной системе отсчета равно

$$\mathbf{E}_{\text{неподв}} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (2.2.8)$$

где \mathbf{v} — скорость жидкости. Итак, в идеальной МГД-модели закон Ома (2.1.4) вытекает из галилеевой инвариантности закона Фарадея и предположения о равенстве нулю электрического поля в системе отсчета, движущейся с плазмой.

Отметим, что сила, действующая на любую движущуюся частицу, равна $Z_i e \mathbf{E}_{\text{движ}}$. Возвращаясь в неподвижную систему отсчета, получим, что эта сила равна $Z_i e \mathbf{E}_{\text{неподв}} + Z_i e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Второе слагаемое — это сила Лоренца, действующая на движущуюся частицу в магнитном поле. Суммируя по всем частицам, из которых состоит плазма, получим, что слагаемое $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ приводит к появлению силы $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ в МГД-уравнении движения (2.1.1).

Вопрос 2.2.2. Заряженная частица находится в однородном магнитном поле, которое нарастает во времени. Как будет двигаться частица?

Вопрос 2.2.3. Эффекты, связанные с электростатической силой $\sigma \mathbf{E}_{\text{неподв}}$, где σ — плотность зарядов плазмы, опущены в МГД-уравнении движения (2.1.1). Если же (2.2.8) умножить на $Z_i e$ и просуммировать по всем частицам, мы получим $\sigma \mathbf{E}_{\text{неподв}} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$. Означает ли это, что электрическая сила компенсирует силу $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$?

§ 2.3. ДВИЖЕНИЕ МАГНИТНЫХ СИЛОВЫХ ЛИНИЙ

Этот раздел написан с целью объяснить часто используемое утверждение о том, что магнитные силовые линии «вморожены» в идеально проводящую жидкость.

В действительности движение силовых линий определено неоднозначно. Утверждение о том, что силовые линии движутся с идеально проводящей жидкостью, действительно согласуется с законом Фарадея, но силовые линии могут двигаться и иначе, все так же в соответствии с законом Фарадея. Положение силовых линий в любой момент времени определяется однозначно, однако движение силовых линий во времени — это в известной степени дело интерпретации.

Существует очень простой способ придать всему этому реальный смысл — нужно представить магнитное поле в виде

$$\mathbf{B} = \nabla\alpha \times \nabla\beta, \quad (2.3.1)$$

где α и β — скалярные функции. Трудность здесь в том, что очень сложно доказать, что любое магнитное поле можно представить с помощью (2.3.1). Проще всего показать, что из (2.3.1) следует $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$; для этого нужно переписать (2.3.1) в виде $\mathbf{B} = \nabla \times (\alpha \nabla \beta)$ или $\mathbf{B} = -\nabla \times (\beta \nabla \alpha)$ и учесть, что $\nabla \cdot \nabla \times \dots = 0$.

Гораздо труднее доказать, что *любое* векторное поле с дивергенцией, равной нулю, можно представить в виде (2.3.1). Чтобы доказать это, начнем с того, что представим себе пару функций α' и β' , которые постоянны вдоль каждой магнитной силовой линии. Это означает, что магнитное поле везде направлено по касательной к поверхностям, с постоянными значениями α' и β' , и такие поверхности нигде не совпадают.

Из этого следует, что вектор $\nabla\alpha' \times \nabla\beta'$ в любой точке направлен вдоль магнитного поля, и для того, чтобы получить правильное значение поля, мы можем умножить это произведение на подходящую функцию координат и времени $f(\mathbf{x}, t)$:

$$\mathbf{B} = f(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\alpha' \times \nabla\beta' \quad (2.3.2)$$

Поскольку дивергенция магнитного поля должна равняться нулю,

$$\nabla \mathbf{B} = \nabla f \cdot \nabla\alpha' \times \nabla\beta' = 0,$$

то $f(\mathbf{x}, t)$ должна быть функцией только α' и β' , $f = f(\alpha', \beta', t)$. После этого f можно ввести в векторное произведение $\nabla\alpha' \times \nabla\beta'$, например, обозначив для получения (2.3.1)

$$\alpha = \int_0^{\alpha'} d\alpha' f(\alpha', \beta'), \quad \beta = \beta'. \quad (2.3.3)$$

В качестве конкретного примера рассмотрим магнитное поле, силовые линии которого обвивают пространственную кривую, называемую магнитной осью. Функцию α можно выбрать так, чтобы она была постоянной на этой кривой и спадала при удалении от нее так, чтобы поверхности постоянного α образовывали трубки, охватывающие магнитную ось. Тогда поверхность постоянного β должна быть поверхностью, навивающейся на магнитную ось так, как это показано на рис. 2.1. Такая функция $\beta(x, t)$ неоднозначно

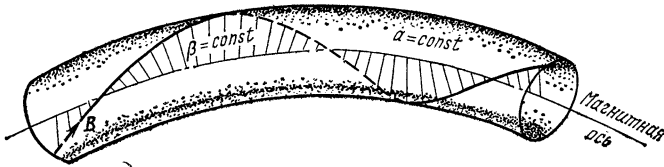


Рис. 2.1. Поверхности $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ вблизи магнитной оси

определена в пространстве; она возрастает при следовании по любому замкнутому контуру, охватывающему магнитную ось, а в тороидальной геометрии она возрастает и при движении вдоль тора по замкнутому пути, параллельному магнитной оси. Таким образом α — однозначная, а β — двукратно многозначная функции. Можно выбрать обе функции α и β однократно многозначными, однако в тороидальной конфигурации, по-видимому, невозможно уменьшить эту степень многозначности.

Выбор α и β для данного магнитного поля неоднозначен. Например, к α можно добавить любую функцию от β , а к β — любую функцию от α , не изменяя произведения $\nabla\alpha \times \nabla\beta$:

$$\mathbf{B} = \nabla\alpha \times \nabla\beta = \nabla[\alpha + f(\beta)] \times \nabla\beta = \nabla\alpha \times \nabla[\beta + f(\alpha)]. \quad (2.3.4)$$

Уравнение, описывающее изменение во времени α и β , можно вывести, подставляя $\mathbf{B} = \nabla\alpha \times \nabla\beta$ в закон Фарадея, записанный для идеально проводящей жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}); \\ \nabla \frac{\partial \alpha}{\partial t} \times \nabla \beta + \nabla \alpha \times \nabla \frac{\partial \beta}{\partial t} &= \nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta)]; \\ \nabla \times \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t} \nabla \beta - \frac{\partial \beta}{\partial t} \nabla \alpha - \mathbf{v} \cdot \nabla \beta \nabla \alpha + \mathbf{v} \cdot \nabla \alpha \nabla \beta \right] &= 0; \\ \nabla \times \left[\frac{d\alpha}{dt} \nabla \beta - \frac{d\beta}{dt} \nabla \alpha \right] &= 0. \end{aligned}$$

Здесь d/dt означает конвективную производную, которая была определена ранее (2.1.7) для произвольного поля скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Таким образом,

$$\frac{d\alpha}{dt} \nabla \beta - \frac{d\beta}{dt} \nabla \alpha = \nabla \varphi, \quad (2.3.5)$$

где φ — некоторая произвольная функция координат и времени. Возможность произвольного выбора φ отражает тот факт, что не существует однозначного способа описания движения силовых линий магнитного поля.

С полным основанием для φ можно выбрать значение $\varphi=0$, что приводит к

$$d\alpha/dt = 0, \quad d\beta/dt = 0. \quad (2.3.6)$$

При таком конкретном выборе φ скалярные поля $\alpha(\mathbf{x}, t)$ и $\beta(\mathbf{x}, t)$ движутся вместе с жидкостью. Отсюда следует, что линии, на которых α и β постоянны, а следовательно, и магнитные силовые линии, должны двигаться вместе с жидкостью. Таким образом, силовые линии не могут разрываться или изменять топологию до тех пор, пока движение жидкости непрерывно в том смысле, что соседние элементы жидкости всегда остаются соседними. Так как эта топологическая инвариантность относится к силовым линиям магнитного поля, которые однозначны вне зависимости от выбора α и β , это заключение справедливо для любого выбора φ .

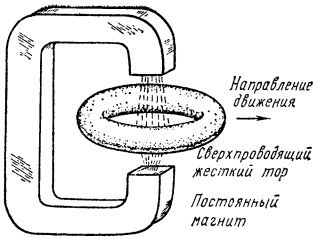


Рис. 2.2 К вопросу 2.3.1. Жесткий идеально проводящий тор вынимают из магнитного поля

способов идентификации. Поэтому нашими представлениями о магнитных силовых линиях нужно пользоваться очень осторожно.

Вопрос 2.3.1. Рассмотрим идеально проводящий жесткий тор, помещенный между полюсами постоянного магнита, так что магнитное поле проходит через отверстие тора (рис. 2.2). Теперь отодвинем тор далеко в сторону. Как будет выглядеть новое магнитное поле? Будет ли какая-либо разница от того, что этот эксперимент проводится в вакууме или внутри идеально проводящей жидкости? Изменится ли что-нибудь, если вначале вдоль тора течет ток?

Вопрос 2.3.2. Предположим, что идеально проводящая жидкость, несущая с собой магнитное поле, натекает на непроводящий клин с гладкими стенками. При этом соседние элементы жидкости расходятся на произвольно большое расстояние. Будут ли разрываться магнитные силовые линии?

Вопрос 2.3.3. Большая идеально проводящая жесткая чечевица маятника при своем движении попадает в область с сильным магнитным полем. Что произойдет? Имеет ли значение, какая сила толкает маятник в магнитное поле?

Вопрос 2.3.4. Когда магнитный диполь вращается вокруг своей оси, магнитное поле не испытывает никакого видимого вращения. Каким образом вращение ионосферы влияет на магнитное поле Земли?

§ 2.4. СИЛА $\mathbf{J} \times \mathbf{V}$

Движение идеально проводящей жидкости влияет на магнитное поле в соответствии с законом Фарадея. В свою очередь, магнитное поле оказывает обратное воздействие на жидкость за счет силы $\mathbf{J} \times \mathbf{V}$, входящей в уравнение движения (2.1.1). В этом параграфе будут рассмотрены различные способы записи и интерпретации силы $\mathbf{J} \times \mathbf{V}$.

Для начала можно записать силу $\mathbf{J} \times \mathbf{V}$ в терминах кривизны магнитных силовых линий и градиента напряженности магнитного поля. Для этого воспользуемся равенством (2.1.2) и соответствующими векторными тождествами:

$$\mu \mathbf{J} \times \mathbf{V} = (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} - \frac{1}{2} \nabla B^2. \quad (2.4.1)$$

Затем введем единичный вектор $\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{V}/|\mathbf{V}|$, направленный вдоль магнитного поля:

$$\mu \mathbf{J} \times \mathbf{V} = B^2 \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{V}} + \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla B^2 - \nabla B^2). \quad (2.4.2)$$

Заметим, что проекция градиента $\hat{\mathbf{B}}$ на направление силовой линии— это кривизна силовой линии \mathbf{k} :

$$\mathbf{k} \equiv \hat{\mathbf{B}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{B}}, \quad (2.4.3)$$

которая равна обратному радиусу кривизны. Два оставшихся члена в (2.4.2) можно записать в виде перпендикулярной проекции градиента

$$\nabla_{\perp} \equiv \nabla - \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{B}} \cdot \nabla, \quad (2.4.4)$$

действующего на величину B^2 . Итак,

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \left[B^2 \mathbf{k} - \frac{1}{2} \nabla_{\perp} B^2 \right]. \quad (2.4.5)$$

Мы говорим о «натяжении» магнитных силовых линий, которое приводит к силе $(1/\mu)B^2\mathbf{k}$, направленной к центру кривизны, точно так же, как о натяжении струны. Давление магнитного поля создает силу $(1/2\mu)\nabla_{\perp}B^2$, действующую со стороны области с большей напряженностью магнитного поля. Изгибание поля приводит к натяжению, а сжатие к увеличению давления.

Вопрос 2.4.1. Рассмотрим плазму, представляющую собой прямой круговой цилиндр с винтовым магнитным полем:

$$\mathbf{B} = B_{\theta}(r) \hat{\theta} + B_z(r) \hat{z}.$$

Какой относительный вклад в такой конфигурации дает магнитное давление, а какой натяжение силовых линий? Как изменится относительный вклад этих сил при изменении профиля полного продольного тока $J_z(r)$, если поле B_z однородно, а

$$B_{\theta}(r) = (\mu/r) \int_0^r dr r J_z(r).$$

В качестве эталона используйте однородный профиль тока, при котором $B_{\theta} = \mu r J_{z0}/2$.

Вопрос 2.4.2. Допустим, что в некоторой области магнитное поле в каждой точке имеет одно и то же направление и в ту же сторону направлен его градиент. Почему параллельный градиент магнитного поля не создает магнитного давления?

Силу $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ можно записать в виде дивергенции от тензора Максвелловских натяжений магнитного поля

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \left(\mathbf{B}\mathbf{B} - \mathbf{I} \frac{1}{2} B^2 \right), \quad (2.4.6)$$

где \mathbf{I} — единичный тензор. Расписывая (2.4.6) по компонентам, получим

$$(\mathbf{J} \times \mathbf{B})_i = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{B}_i \mathbf{B}_j - \delta_{ij} \frac{1}{2} B^2 \right). \quad (2.4.7)$$

Такое представление силы $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ в виде дивергенции от тензора особенно полезно при записи МГД-уравнений в консервативной форме.

§ 2.5. КОНСЕРВАТИВНЫЕ ФОРМЫ МГД-УРАВНЕНИЙ

Говорят, что уравнения записаны в консервативной форме, если производная по времени от какой-либо величины равна дивергенции от некоторого потока. Консервативная форма записи МГД-уравнений в неподвижных (эйлеровых) координатах выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) = \nabla \cdot \left[-\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{I} (p + B^2/2\mu) \right]; \quad (2.5.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}); \quad (2.5.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \cdot \mathbf{v}); \quad (2.5.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho v^2 + \frac{p}{\Gamma-1} + \frac{1}{2\mu} B^2 \right) = -\nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{p}{\Gamma-1} + p \right) \mathbf{v} + \right.$$

кинетическая + потенциальная энергия

конвекция кинетической + термодинамической энергии

работа сил давления на поверхности

$$\left. + \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right]. \quad (2.5.4)$$

вектор
Пойнтинга

Эти уравнения описывают изменение во времени импульса, потока магнитного поля, плотности, массы и полной энергии в любой точке пространства. Интегрируя каждое уравнение по объему некоторой заданной области и используя теорему Гаусса [как и в (2.2.2)], можно получить, что правая часть каждого из уравнений представляет собой поток через границу данной области.

Такие консервативные формы уравнений особенно полезны при численных расчетах. Например, можно записать эти уравнения в конечных разностях так, что в процессе изменения переменных во времени они будут строго сохранять момент, поток магнитного поля, полную массу и энергию. Кроме того, консервативные свойства этих аналитических уравнений можно использовать для определения точности других, неконсервативных численных дифференциальных схем.

Консервативные формы уравнений полезны для выявления естественных граничных условий, которые позволяют рассматривать исследуемую систему как изолированную. Систему можно считать изолированной, если суммарный поток каждой величины через всю границу равен нулю, но обычно требуют равенства нулю потоков через каждый дифференциальный элемент границы.

Например, для сохранения массы должна отсутствовать конвекция поперек границы:

$$\mathbf{v}_1 = 0. \quad (2.5.5)$$

Для сохранения энергии должен быть равен нулю вектор Пойтинга:

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_{\perp} = 0. \quad (2.5.6)$$

Для сохранения магнитного потока не должно быть параллельного границе электрического поля:

$$\mathbf{E}_{\parallel} = 0. \quad (2.5.7)$$

Условие (2.5.7) можно доказать, интегрируя закон Фарадея (2.1.3) по произвольному элементу граничной поверхности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = - \int d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = - \oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.5.8)$$

Уравнение движения для вывода граничных условий обычно не используется, так как в уравнение движения (2.5.1) не входят силы, действующие на плазму со стороны стенок и обеспечивающие условие $\mathbf{v}_{\perp} = 0$.

Заметим, что граничное условие $\mathbf{E}_{\parallel} = 0$ соответствует $(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_{\perp} = 0$. Более того, если в начальный момент граница совпадает с магнитной поверхностью, $\mathbf{B}_{\perp} = 0$, и если вблизи границы жидкость идеально проводящая $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, то граничное условие $\mathbf{v}_{\perp} = 0$ приводит к $\mathbf{E}_{\parallel} = 0$, и граница всегда будет магнитной поверхностью. При этих условиях требуется лишь одно граничное условие — граничное условие на жесткой стенке $\mathbf{v}_{\perp} = 0$. В противном случае, когда стенка отделена от плазмы вакуумной областью или если плазма, прилегающая к стенке, имеет нулевое давление и температуру, условие $\mathbf{v}_{\perp} = 0$ можно опустить, и нужно будет потребовать только выполнения условия $\mathbf{E}_{\parallel} = 0$ на идеально проводящей стенке. При этих условиях жесткая, идеально проводящая стенка будет полностью изолировать плазму в МГД-приближении.

Консервативные формы МГД-уравнений можно записать и в лагранжевой системе координат, движущейся вместе с жидкостью. Как мы уже видели выше, функции α и β можно считать постоянными в каждом идеально проводящем жидком элементе (2.3.6). Кроме того, объединяя уравнения для давления (2.1.5) и плотности (2.1.6), можно показать, что *энтропия**, определяемая равенством

$$e(\mathbf{x}, t) \equiv p/\rho^{\Gamma}, \quad (2.5.9)$$

сохраняется в каждом элементе жидкости:

$$\frac{d}{dt} \frac{p}{\rho^{\Gamma}} = 0. \quad (2.5.10)$$

Отметим, что это уравнение не означает, что энтропия однородна во всем объеме плазмы.

Вопрос 2.5.1. Удовлетворяют ли МГД-уравнения закону сохранения момента количества движения? Чему равен локальный момент сил, действующих на плазму?

* В действительности это функция энтропии, а не сама энтропия. Выраженная через $e(\mathbf{x}, t)$ энтропия равна $\frac{1}{\Gamma-1} \ln e(\mathbf{x}, t)$ — *Примеч. ред.*

Вопрос 2.5.2. Рассмотрим жесткий диск с осью вращения, проходящей через его центр. К диску концентрично оси прикреплено кольцо из сверхпроводника с током, окруженное кольцом из закрепленных на диске заряженных бузиновых шариков. Предположим, что сверхпроводник нагревают так, что он приобретает конечную проводимость, ток затухает, и магнитное поле исчезает. Переменное магнитное поле вызывает вихревое электрическое поле, которое создает силу, действующую на заряды, и приводит диск во вращение. Откуда появился момент количества движения?

§ 2.6. ЭФФЕКТЫ, НЕ ОПИСЫВАЕМЫЕ МГД-МОДЕЛЬЮ

МГД-модель часто используется даже там, где ее нельзя оправдать — для изучения геометрии, слишком сложной для применения более совершенных моделей. При этом она позволяет понять и прогнозировать явления, которые затем уточняются с учетом более тонких физических эффектов. Исходя из того, что МГД-уравнения представляют собой только первое грубое приближение к действительности, будет гораздо полезнее обсудить некоторые из наиболее важных эффектов, опущенных в этой модели, чем приводить точный вывод уравнений с предварительной оценкой области применимости. Полный вывод МГД-уравнений, с обсуждением сделанных предположений, можно найти в работах С. И. Брагинского [5], Бойды и Сандерсона [6] и многих других.

Оправданной точкой для дальнейшего будут служить уравнения моментов — система уравнений, описывающая изменение во времени плотности импульса и энергии для каждой компоненты плазмы. При использовании уравнений моментов наиболее часто ссылаются на очень ясную статью С. И. Брагинского [5]. Дополнительную полезную информацию можно получить в работе Хердана и Лиля [7], а детальные расчеты процессов переноса можно найти в статье Шкаровского, Джонстона и Бачинского [8].

Основное предположение, которое делается при выводе уравнений для моментов, заключается в локальности процессов переноса на фоне характерных масштабов изучаемых явлений. Однако в экспериментальных термоядерных установках средняя длина свободного пробега частицы значительно превышает размеры плазмы — обычно частица успевает много раз пролететь вдоль тороидальной плазмы, прежде чем почувствует влияние столкновений. Таким образом, явления переноса должны определяться глобальными параметрами плазмы.

Такая теория известна под названием неоклассической теории переноса (см. недавно вышедший обзор Хинтона и Хазелтайна [12]). Насколько мне известно, до сих пор еще не получена система неоклассических уравнений, пригодных для изучения МГД-неустойчивостей, а изложение сделанных попыток учесть большую длину пробега выходит далеко за рамки этой книги. Таким образом, здесь рассмотрены лишь те эффекты, которые следуют из обычных уравнений моментов, полученных С. И. Брагинским [5].

Состояние МГД-жидкости (v , p , ρ) можно определить в терминах моментов функции распределения частиц $f_i(x, v, t)$ и масс m_i :

каждой компоненты, включая электроны. Плотность — это

$$\rho \equiv \sum_i m_i n_i, \quad (2.6.1)$$

где

$$n_i \equiv \int d^3v f_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (2.6.2)$$

плотность частиц каждой компоненты. Скорость жидкости

$$\mathbf{v} \equiv \frac{1}{\rho} \sum_i m_i n_i \mathbf{v}_i, \quad (2.6.3)$$

где

$$\mathbf{v}_i \equiv \int d^3v v \mathbf{v} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (2.6.4)$$

средняя скорость каждой компоненты. И наконец, давление плазмы определяется равенством

$$p \equiv \sum_i n_i T_i, \quad (2.6.5)$$

где

$$T_i \equiv \frac{1}{3} m_i \int a^3v (\mathbf{v} - \mathbf{v}_i)^2 f_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \quad (2.6.6)$$

температура каждой компоненты.

Уравнение эволюции плотности (2.1.6) следует без всяких приближений из уравнений непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} n_i + \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) = 0. \quad (2.6.7)$$

Другую форму записи этого уравнения — уравнение сохранения заряда

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.6.8)$$

в котором

$$\sigma \equiv \sum_i Z_i e n_i \quad (2.6.9)$$

плотность зарядов, а

$$\mathbf{J} \equiv \sum_i Z_i e n_i \mathbf{v}_i \quad (2.6.10)$$

плотность тока, можно получить, умножая (2.6.7) на заряд $Z_i e$ каждой компоненты, включая $Z = -1$ для электронов. Уравнения (2.6.8) — (2.6.10) в МГД-теории не используются, так как σ не входит больше ни в одно из МГД-уравнений.

Вопрос 2.6.1. Из закона Ампера (2.1.2) следует, что $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, и, следовательно, из (2.6.8) вытекает, что $\partial \sigma / \partial t = 0$. Однако уравнение Максвелла $\sigma = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$ вместе с законом Ома показывает, что σ , вообще говоря, не кон-

станта и не равна нулю. Как разрешить это противоречие? Согласуется ли равенство (2.6.10) с законом Ампера (2.1.2)?

Остальные уравнения для моментов существенно более сложны. Объединение уравнений сохранения импульса для каждой компоненты после пренебрежения вязкостью, неизотропностью давления и электростатическими силами приводит к уравнению движения (2.1.1). Отбрасывание электростатической силы $\sigma \mathbf{E}$ является хорошим приближением, когда рассматриваются расстояния, существенно большие дебаевской длины, а скорости — меньшие релятивистских.

Как отмечено С. И. Брагинским [5], давление 1 кГ/см^2 эквивалентно большому магнитному полю 5 кГс и гигантскому электрическому полю $1,5 \cdot 10^6 \text{ В/см}$.

Одна из простейших моделей с анизотропным давлением — это модель с двумя адиабатами, предложенная Чу, Гольбергером и Лоу [10]. Одними из первых эту модель для исследования МГД-неустойчивостей использовали Бернштейн, Фримен, Крускал и Кулсруд [11]. Они показали, что если в равновесии давление изотропно, то в модели с двумя адиабатами плазма более устойчива, чем в обычной МГД-модели.

Наиболее важный из пренебрегаемых в уравнении движения членов — это вязкость. Поскольку вязкость возникает в результате обмена импульсами между различными элементами жидкости, то основной вклад здесь дает ионная компонента, а не более легкая электронная. Вязкие члены имеют достаточно сложную форму оператора в частных производных, которая обсуждается в работе С. И. Брагинского [5]. В работе [9] основные члены записаны Гриммом и Джонсоном в виде

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (2.6.11)$$

$$\mathbf{P} = -3\rho\nu \left(\hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{B}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \right) \cdot \left[\hat{\mathbf{B}} \nabla (\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{v}) - (\hat{\mathbf{B}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{B}}) \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right], \quad (2.6.12)$$

где

$$\nu \approx 0,96 \frac{T_i}{m_i} \tau_{ii} \approx \frac{6,17 \cdot 10^{25} (T_i [\text{кэВ}])^{5/2} \text{ см}^2}{n_e [\text{см}^{-3}] A^{1/2} Z^3 \Lambda} \text{ с}. \quad (2.6.13)$$

Здесь τ_{ii} — время ион-ионных столкновений;

$$\tau_{ii} \approx \frac{6,7 \cdot 10^{10} (T_i [\text{кэВ}])^{3/2} A^{1/2}}{n_e [\text{см}^{-3}] Z^3 \Lambda} \text{ с}, \quad (2.6.14)$$

A — отношение массы иона к массе протона и Λ — кулоновский логарифм, поделенный на 10 (см. [5, с. 192]). Дополнительный вклад в вязкость дают члены более высокого порядка по отношению частоты столкновений к циклотронной частоте

$$(\omega_{ci} \tau_{ii})^{-1} \approx \frac{1,55 \cdot 10^{-19} n_e [\text{см}^{-3}] Z A^{1/2} \Lambda}{(T_i [\text{кэВ}])^{3/2} B [\text{Тл}]} \quad (2.6.15)$$

В плазме с термоядерными параметрами ($n_e \sim 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $T_i > 1 \text{ кэВ}$, $B > 2 \text{ Тл}$) этот параметр разложения очень мал. Заметим, что столкновительная вязкость (2.6.13) быстро увеличивается с ростом температуры. Это означает, что с ростом средней длины пробега увеличивается перенос импульса вдоль магнитных силовых линий. Такая вязкость (2.6.12) — просто проявление анизотропии $p_{\parallel} \neq p_{\perp}$. Для характерных времен, меньших, чем τ_{ii} , необходимо поэтому использовать теорию с двумя адиабатами либо что-нибудь подобное.

Закон Ома можно получить вычитанием уравнений движения, записанных для каждой компоненты. В пределе низких частот ($\omega \ll \omega_{ci}$) и малого ларморовского радиуса получаем

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{J} + \frac{1}{n_e e} [\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla(n_e T_e)]. \quad (2.6.16)$$

Удельное сопротивление можно трактовать как коэффициент диффузии магнитного поля

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\eta}{\mu} \nabla^2 \mathbf{B} + \dots \quad (2.6.17)$$

В том случае, когда для η используется спитцеровское выражение, числовое значение коэффициента диффузии η/μ дается формулой:

$$\frac{\eta}{\mu} \approx 255 Z \Lambda (T_e [\text{кэВ}])^{-3/2} \text{ см}^2/\text{с}. \quad (2.6.18)$$

Коэффициент диффузии меньше вязкости, но диффузия очень важна в МГД-теории, так как позволяет силовым линиям размыкаться и изменять свою топологию.

Последнее слагаемое в (2.6.16) — это так называемый эффект Холла. Он является следствием эффектов конечного ларморовского радиуса и поэтому формально меньше основных членов в (2.6.16) в $(\omega_{ci} \tau_{ii})^{-1}$ раз, где $(\omega_{ci} \tau_{ii})^{-1}$ дается выражением (2.6.15). Некоторые полагают, что осцилляторная структура колебаний Мирнова обусловлена эффектом Холла, однако это спорный вопрос.

И наконец, среди МГД-уравнений имеется уравнение сохранения энергии (2.1.5) или (2.5.4). Имеется так много возможных источников, стоков и путей превращения энергии, что не существует окончательного вида этого уравнения. Максимальный коэффициент переноса энергии — это продольная электронная теплопроводность

$$k_{\parallel e} \simeq 3,16 \frac{T_e}{m_e} \tau_{ei} \approx \frac{1,95 \cdot 10^{27} (T_e [\text{кэВ}])^{5/2} \text{ см}^2}{n_e [\text{см}^{-3}] Z \Lambda} \frac{\text{см}^2}{\text{с}}. \quad (2.6.19)$$

Фактически для любых масштабов времени, представляющих интерес, продольная электронная теплопроводность приводит к выравниванию температуры вдоль магнитных поверхностей. Теплопроводность же поперек магнитного поля меньше продольной в

$(\omega_{ce}\tau_{ei})^{-2}$ раз, где

$$(\omega_{ce}\tau_{ei})^{-1} \approx \frac{5,13 \cdot 10^{-18} n_e [\text{см}^{-3}] Z \Lambda}{(T_e [\text{кэВ}])^{3/2} B [\text{Тл}]} \quad (2.6.20)$$

Итак, идеальная МГД-модель применима в некоторой несуществующей промежуточной области параметров, в которой столкновения достаточно частые, чтобы можно было пренебречь теплопроводностью и вязкостью, и в то же время достаточно редкие для того, чтобы можно было пренебречь сопротивлением плазмы. Однако применимость модели сильно зависит от характера изучаемых явлений. Например, при исследовании равновесия и тех неустойчивостей, возмущения которых однородны вдоль силовых линий магнитного поля, эффектами, связанными с продольной теплопроводностью и вязкостью, можно пренебречь. Неустойчивости колебаний несжимаемой жидкости, распространяющихся как параллельно, так и перпендикулярно магнитному полю ($\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0$, $\nabla_{\perp} \mathbf{v} = 0$), вообще не чувствуют основных эффектов, связанных с вязкостью. Вдали от точки нейтральной устойчивости конечная проводимость, как правило, не влияет на идеальные МГД-неустойчивости. При использовании МГД-уравнений в качестве первого приближения необходимо для уточнения выводов оценить влияние каждого из механизмов переноса.

§ 2.7. РЕЗЮМЕ

В § 2.1 приведены уравнения идеальной МГД-модели (2.1.1)—(2.1.6) и дана физическая интерпретация каждого слагаемого. Указано, что хотя в системе координат, движущейся вместе с жидкостью, электрическое поле равно нулю, в лабораторной системе координат оно, вообще говоря, отлично от нуля, и поэтому плазма может двигаться поперек магнитного поля.

Наиболее важный результат § 2.3 заключается в том, что в идеально проводящей жидкости силовые линии магнитного поля не могут размыкаться и изменять свою топологию, если соседние элементы жидкости всегда остаются соседними.

Силу $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ можно интерпретировать как комбинацию натяжения магнитного поля из-за кривизны магнитных силовых линий и магнитного давления за счет градиента напряженности поля, перпендикулярного к направлению поля (2.4.4). Другая интерпретация МГД-уравнений следует из консервативной формы записи уравнений (2.5.1)—(2.5.4). Граничные условия, которые сохраняют массу, поток магнитного поля и энергию, записываются следующим образом: $\mathbf{E}_{\parallel} = 0$ и $\mathbf{v}_{\perp} = 0$.

Наиболее важные из опущенных в уравнениях идеальной МГД-модели эффектов: 1) теплопроводность вдоль магнитного поля, 2) вязкость и 3) сопротивление. Хотя сопротивление численно мало, оно имеет важные последствия, так как снимает запрет на изменение топологии магнитного поля.

§ 2.8. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Представление магнитного поля в виде $\mathbf{V} = \nabla\alpha \times \nabla\beta$ можно найти в работах:

1. Grad H., Rubin H. Geneva Conf., 1958, v. 31, p. 190—197.
 2. Mercier C., Luc H. Lectures in Plasma Physics, 1974.
- Исследование движения магнитных силовых линий в идеально проводящей жидкости с использованием сложных математических приемов дано в статье:
3. Newcomb W. A. — Annals of Physics, N. Y., 1958, v. 3, p. 347—385.
- Структура магнитных полей обсуждается в работе:
4. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Вопросы теории плазмы. Вып. 2. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Госатомиздат, 1963, с. 3.
- Выводы уравнений для моментов и другие модели плазмы можно найти в следующих работах:
5. Брагинский С. И. Вопросы теории плазмы. Вып. 1. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Госатомиздат, 1963, с.183—272.
 6. Boyd T. J. M., Sanderson J. J. Plasma Dynamics, N. Y., Barnes and Noble, 1969.
 7. Herdan R., Liley B. S. — Rev. Mod. Phys., 1960, v. 32, p. 731—741.
 8. Shkarofsky I. P., Johnston T. W., Bachynski M. P. The Particle Kinetics of Plasmas. (Reading, Mass.: Addison—Wesley, 1966).
 9. Grimm R. C., Johnson J. L. — Plasma Physics, 1972, v. 14, p. 617—634.
 10. Chew G. F., Goldberger M. L., Low F. B. — Proc. Roy. Soc. (Lond.), 1956, v. A236, p. 112—118.
 11. Bernstein I. B. e. a. — Proc. Roy. Soc. (Lond.), 1958, v. A244, p. 17.
 12. Hinton F. L., Hazeltine R. D. — Rev. Mod. Phys., 1976, v. 48, p. 239—308.

Глава 3. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РЭЛЕЯ—ТЕЙЛОРА

Неустойчивость Рэля — Тейлора возникает в том случае, когда тяжелая несжимаемая жидкость удерживается в поле тяжести жидкостью с меньшей плотностью. Эта неустойчивость относится к классу неустойчивостей, которые развиваются в слоистой среде за счет выталкивающей силы. Как мы увидим, градиент *плотности* важен только в несжимаемой жидкости; при использовании адиабаты в качестве уравнения состояния необходимым условием является наличие обращенного градиента *энтропии*, а при использовании условия изотермичности для неустойчивости требуется обращенный градиент *температуры*. Все эти неустойчивости обязаны одному физическому механизму, состоящему в том, что распределение плотности в *возмущенном* состоянии оказывается более выгодным — обладает меньшей потенциальной энергией в поле тяжести, чем распределение плотности в невозмущенном состоянии. Это станет ясным, когда мы рассмотрим несколько простых примеров.

Между неустойчивостью Рэля — Тейлора плоского слоя в поле тяжести и теми неустойчивостями плазмы в магнитном поле, которые раскачиваются как за счет кривизны магнитного поля и продольного тока, так и за счет градиента давления, имеются существенные различия. Данная глава о моделях плоского слоя включена в книгу о магнитном удержании плазмы, чтобы показать некоторые характерные черты неустойчивости жидкости и используемые для их изучения приемы. В выбранных примерах для

простоты учтены лишь наиболее существенные эффекты. Первые два примера, в которых рассматривается идеальная классическая жидкость без магнитного поля и электропроводности, иллюстрируют вариационные методы, а также разницу между несжимаемой, адиабатической и изотермической моделями. На третьем примере показано влияние магнитного поля на идеально проводящую МГД-жидкость при прочих равных условиях. Более полное исследование этого вопроса и обзор литературы можно найти в книге Чандрасекара [1].

§ 3.1. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим несжимаемую жидкость, равновесная плотность которой изменяется в вертикальном направлении y (рис. 3.1)

$$\rho = \rho(y), \quad (3.1.1)$$

подверженную ускорению силы тяжести

$$\mathbf{g} = -g\hat{y}. \quad (3.1.2)$$

На практике неоднородную плотность в несжимаемой жидкости можно получить, например, изготовив слоистый солевой раствор в воде. Если равновесие стационарно ($\partial/\partial t=0$) и неподвижно (нет потоков), то градиент давления определяется уравнением

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g. \quad (3.1.3)$$

Это означает, что на любом уровне давление определяется массой всей жидкости, находящейся над этим уровнем.

При отсутствии вязкости, поверхностного натяжения и прочих эффектов неидеальности уравнения гидродинамики выглядят следующим образом:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p - \rho g \hat{y}; \quad (3.1.4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \rho; \quad (3.1.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.1.6)$$

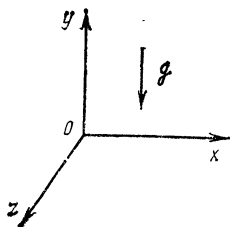


Рис. 3.1. Система координат, которая использовалась при исследовании неустойчивости Рэлея—Тейлора

Условие несжимаемости $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ означает, что в любой фиксированный объем втекает столько жидкости, сколько вытекает из него. Это условие упрощает уравнение непрерывности (3.1.5), физический смысл которого теперь заключается в том, что плотность любого движущегося элемента жидкости остается неизменной.

Введем теперь бесконечно малые возмущения и линеаризуем эти уравнения. При

этом член $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ выпадает, а коэффициенты линеаризованных уравнений не зависят ни от времени, ни от координат x и z . Полезно использовать фурье-разложение возмущений по этим координатам и рассмотреть одну фурье-гармонику по времени:

$$v^1(y) \exp(\gamma t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}). \quad (3.1.7)$$

Переменные ρ^1 , ρ^1 , v_x^1 и v_z^1 можно исключить с помощью алгебраических преобразований, в результате чего получим одно уравнение второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \gamma^2 \frac{\partial v_y^1}{\partial y} \right) = k^2 \left(\rho \gamma^2 - g \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) v_y^1. \quad (3.1.8)$$

На величину $v_y^1(y, t)$ необходимо наложить два граничных условия.

Для каждого заданного волнового числа k для $v_y^1(y)$ существует бесконечное число решений, соответствующих различным значениям инкремента $\text{Re}(\gamma)$ и частоты колебаний $\text{Im}(\gamma)$. Такой набор всех возможных комплексных значений γ называется *спектром* задачи на собственные значения.

Вопрос 3.1.1. Можете ли вы, при заданном произвольном профиле плотности $\rho(y)$, построить приблизительное решение, сильно локализованное по сравнению с линейным масштабом равновесия? Имеют ли эти решения дискретный спектр собственных значений? В любом ли месте может быть локализовано решение? Основываясь на этом решении, сделайте вывод о том, где следует ожидать наличия точки сгущения в спектре.

Вопрос 3.1.2. Постройте решение (3.1.8) в случае $\rho = \rho^0 \exp(y/\lambda)$ с граничными условиями $v_y^1(0) = v_y^1(L) = 0$. Какие моды оказываются при этом наиболее неустойчивыми?

Вопрос 3.1.3. Найдите собственные функции (3.1.8) в том конкретном случае, при котором профиль плотности везде однороден, за исключением разрыва при $y=0$, с граничными условиями $v_y^1(a) = v_y^1(-b) = 0$. Корректна ли с математической точки зрения эта задача?

Перейдем к описанию приема, часто применяемого в теории устойчивости. Этот прием заключается в использовании вариационной формы записи основного уравнения в том случае, когда в задаче на собственные значения бывает трудно построить даже приблизительные решения. Рассмотрим случай со следующими граничными условиями:

$$v_y^1 = 0 \text{ или } \partial v_y^1 / \partial y = 0 \quad (3.1.9)$$

на верхней и нижней границах области. Умножим (3.1.8) на v_y^1 и проинтегрируем по y по частям, используя граничные условия

$$\gamma^2 = \frac{\int dy g \partial \rho / \partial y v_y^2}{\int dy \rho \left[\frac{1}{k^2} (dv_y / dy)^2 + v_y^2 \right]}. \quad (3.1.10)$$

Преимущество (3.1.10) по сравнению с (3.1.8) состоит в том, что с помощью (3.1.10) можно оценить величину γ^2 , используя

произвольные пробные функции, которые удовлетворяют граничным условиям. Чем точнее пробная функция приближается к собственной функции, тем точнее будет оценка для собственного значения γ . Используя пробные функции с подгоночными параметрами, можно оптимизировать оценку самой быстрой неустойчивости, т. е. максимального значения γ . Используя конечное число из некоторой полной системы пробных функций, можно построить задачу на собственные значения, решение которой включает в себя обращение матрицы конечной размерности.

Вопрос 3.1.4. Почему можно использовать пробные функции для оценки γ только в вариационном принципе (3.1.10), а не в первоначальном уравнении (3.1.8)?

Вопрос 3.1.5. Можно ли построить вариационный принцип в том случае, когда условия (3.1.9) на границе не выполняются?

Легко показать, что неустойчивость существует тогда и только тогда, когда на некотором уровне в жидкости произведение $g\partial\rho/\partial y$ положительно. Для того чтобы продемонстрировать это с помощью вариационного принципа (3.1.10), выберем для v_y^1 такую пробную функцию, которая равна нулю везде, за исключением уровней, где $g\partial\rho/\partial y$ больше нуля. Для любой такой пробной функции $\gamma^2 > 0$, хотя не обязательно имеет максимальное значение. Тот факт, что решениями являются оба значения $\gamma = +|\gamma|$ и $\gamma = -|\gamma|$, указывает на то, что неустойчивость сохраняется при обращении времени. Инкремент не зависит от ρ , но непосредственно связан с обратной величиной характерного масштаба градиента $\lambda = \rho / (\partial\rho/\partial y)$. Наиболее короткие длины волн $k^2 \rightarrow \infty$ являются наиболее неустойчивыми, стремясь в пределе к конечной точке сгущения для γ^2 . Если $g\partial\rho/\partial y$ везде отрицательно, то все пробные функции приводят к отрицательным значениям γ^2 , указывая на то, что имеются только устойчивые колебания. Чандрасекар [1] показал, как можно построить вариационный принцип в том случае, когда в рассмотрение включены простые модели для вязкости и поверхностного натяжения. Вязкость влияет на инкремент, но не приводит к стабилизации. Поверхностное натяжение стабилизирует наиболее коротковолновые поперечные волны.

Нелинейная эволюция неустойчивости Рэлея—Тейлора была изучена экспериментально в работе [3]. Возмущения легкой жидкости нарастают в виде вытянутых пузырей, в то время как тяжелая жидкость стекает вниз между этими пузырями в виде тонких волокон или листов. Экспоненциальное нарастание неустойчивости сменяется линейным ростом во времени в тот момент, когда амплитуда колебаний достигает порядка $2,5/k$. После такого перехода легкая жидкость всплывает со скоростью $\sim \sqrt{g/k}$, в то время как движение тяжелой жидкости приближается к свободному падению.

Вопрос 3.1.6 [4]. Как нужно осуществлять сжатие плазмы магнитным полем, чтобы ограничить амплитуду экспоненциально нарастающей неустойчивости Рэлея—Тейлора, как можно медленнее или как можно быстрее?

§ 3.2. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Заменяем теперь условие несжимаемости $\nabla \mathbf{v} = 0$ адиабатическим законом изменения давления жидкости (2.1.5). С учетом сжимаемости уравнение неразрывности превращается в уравнение (2.1.6). Объединяя уравнения для давления и плотности, можно показать, что энтропия произвольного жидкого элемента

$$e \equiv p/\rho^\Gamma, \quad \Gamma = 5/3 \quad (3.2.1)$$

сохраняется при его движении в соответствии с уравнением (2.5.10).

В этом случае равновесное состояние будет таким же, как и в § 3.1, и та же процедура вывода приводит к следующему уравнению, описывающему неустойчивость:

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\rho \gamma^2 \Gamma p}{\rho \gamma^2 + k^2 \Gamma p} \frac{\partial}{\partial y} v_y^1 = \left\{ \rho \gamma^2 - \frac{k^2 \rho^2 g^2}{\rho \gamma^2 + k^2 \Gamma p} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k^2 \rho g \Gamma p}{\rho \gamma^2 + k^2 \Gamma p} \right) \right\} v_y^1. \quad (3.2.2)$$

Из этого уравнения легко получить вариационный принцип, если использовать подходящие граничные условия, подобные условиям (3.1.9).

Однако полезнее будет упростить основное уравнение, рассматривая поперечные длины волн, существенно меньшие характерного масштаба изменения давления:

$$k^{-2} \ll \lambda_p^2, \quad \text{где } \lambda_p \equiv 1 / \left| \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial y} \right|. \quad (3.2.3)$$

Теперь, используя уравнение равновесия (3.1.3) и оценки инкремента для несжимаемой жидкости $\gamma^2 \lesssim g/\lambda_p$, получаем:

$$\rho \gamma^2 \ll k^2 \Gamma p. \quad (3.2.4)$$

В этом приближении основное уравнение сводится к

$$\frac{\gamma^2}{k^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{\partial v_y^1}{\partial y} \right) = \left\{ \rho \gamma^2 - \frac{\partial}{\partial y} (\rho g) - \frac{\rho^2 g^2}{\Gamma p} \right\} v_y^1, \quad (3.2.5)$$

а соответствующий вариационный принцип:

$$\gamma_{\text{адиабат}}^2 \underset{k^{-2} \ll \lambda_p^2}{=} \frac{\int dy \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (\rho g) + \frac{\rho^2 g^2}{\Gamma p} \right\} v_y^2}{\int dy \rho \left\{ k^{-2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + v_y^2 \right\}}. \quad (3.2.6)$$

Почему же неустойчивость остается даже в том случае, когда $(\partial/\partial y)\rho < 0$? Очевидно, что эта неустойчивость не раскачивается обратным градиентом плотности. Харрисом была предложена следующая простая модель для объяснения механизма неустойчивости (частное сообщение в 1975 г.). Предположим, мы перенесли сферический объем жидкости с некоторого уровня на другой, более высокий, как показано на рис. 3.2. Этот объем должен либо расшириться, либо сжаться для того, чтобы подстроить давление внутри объема под давление внешней жидкости. Если после тако-

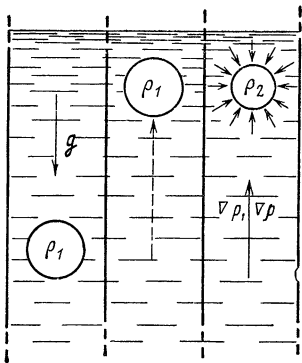


Рис. 3.2. Последовательность этапов, демонстрирующая причину неустойчивости Рэлея—Тейлора сжимаемой жидкости, на модели с пузырьком. Любезно представлено Е. Г. Харрисом

го сжатия или расширения плотность внутри поднявшейся сферы окажется меньше плотности окружающей жидкости, то результирующая выталкивающая сила будет продолжать поднимать объем вверх и, таким образом, приводить к нарастанию неустойчивости. Инверсия плотности, необходимая для неустойчивости, возникает уже после развития возмущения и не обязана существовать в самом начале.

Используем другой подход к этому вопросу, заметив, что вариационный принцип (3.2.6) можно переписать в виде

$$\gamma_{\text{адиабат}}^2 = \frac{-\int dy \frac{\rho g}{\Gamma} \frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial y} v_y^2}{k^{-2} \ll \lambda_p^2 \int dy \rho \left\{ k^{-2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + v_y^2 \right\}}, \quad (3.2.7)$$

где e — энтропия жидкости, которая определена выражением (3.2.1). Можно видеть, что в этой адиабатической модели неустойчивость Рэлея—Тейлора изменяет распределение энтропии в слоистой жидкости. Таким образом, эту неустойчивость можно рассматривать как проявление «энтропийной волны», которая является решением линейризованных МГД-уравнений для бесконечной однородной плазмы, представляющим собой разрыв в распределении энтропии. Спектр энтропийных волн, состоящий в однородной среде из одного собственного значения ($\gamma^2=0$), в слоистой среде переходит в непрерывный спектр ($\gamma^2(n, k)$).

Если вместо адиабатической модели или модели несжимаемой жидкости используется изотермическая модель, то неустойчивость Рэлея—Тейлора будет вызываться обращенным градиентом температуры (холоднее сверху и теплее снизу), а не градиентом энтропии или плотности. Термин *изотермическая модель* означает, что температура при движении жидкого элемента не меняется:

$$\frac{dT}{dt} = 0, \quad \text{где } p = \rho T. \quad (3.2.8)$$

Изотермическая модель следует из адиабатической при $\Gamma=1$. Используя такое значение отношения удельных теплоемкостей в вариационном принципе (3.2.6), получаем:

$$\gamma_{\text{изотерм}}^2 = \frac{-\int dy \rho g \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial y} v_y^2}{k^2 \ll \lambda_p^2 \int dy \rho \left\{ k^{-2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + v_y^2 \right\}}. \quad (3.2.9.)$$

§ 3.3. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РЭЛЕЯ — ТЕЙЛОРА В МГД-МОДЕЛИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В последних двух примерах рассматривалась гидродинамическая модель, в которой жидкость была неэлектропроводна и не взаимодействовала с магнитным полем. Для того чтобы выяснить влияние магнитного поля с широм

$$\mathbf{B} = B_x(y) \hat{\mathbf{x}} + B_z(y) \hat{\mathbf{z}} \quad (3.3.1)$$

на неустойчивость Рэля — Тейлора, в этом параграфе в качестве примера будет рассмотрена МГД-модель плоского слоя идеально проводящей жидкости, помещенного в вертикальное поле тяжести (рис. 3.3). Термин *шир* означает, что магнитное поле имеет разное направление на разной высоте. В этом примере магнитное поле на любой высоте однородно и имеет прямые силовые линии, но его значение, как и направление, меняется с высотой. Это означает, что эффекты, связанные с кривизной магнитного поля, отсутствуют, однако, вообще говоря, в плоскости $x-z$ течет равновесный ток.

Система координат выбрана таким образом, что волновой вектор возмущений направлен вдоль оси x , как показано на рис. 3.3. Для того чтобы упростить анализ, мы снова вернемся к модели несжимаемой жидкости; выше мы уже видели, каким образом можно обобщить результаты на другие термодинамические модели.

Соответствующие уравнения:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \rho g \hat{\mathbf{y}}; \quad (3.3.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (3.3.3)$$

используются вместе с (3.1.5) и (3.1.6).

При наличии магнитного поля равновесное состояние изменяется двояким образом. Если магнитное поле меняется с высотой, то в плазме должен протекать равновесный ток с плотностью

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial B_z}{\partial y} \hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial B_x}{\partial y} \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.3.4)$$

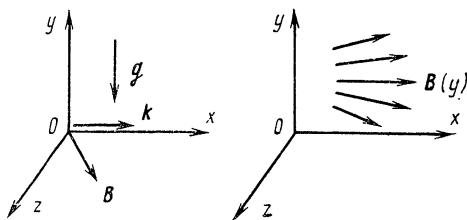


Рис. 3.3. Координаты и магнитное поле с широм для исследования неустойчивости Рэля — Тейлора

а при изменении с высотой квадрата напряженности магнитного поля появляется дополнительная равновесная сила $\nabla |\mathbf{B}|^2$:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[p + \frac{1}{2\mu} (B_x^2 + B_y^2) \right] = -\rho g. \quad (3.3.5)$$

Помимо этого, налагаются еще два условия: $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ и $\rho = \rho(y)$.

Линеаризуя, как и ранее, МГД-уравнения и рассматривая лишь одну фурье-гармонику, можно получить, исключив все переменные, кроме v_y' , следующее:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[\rho \gamma^2 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 \right] \frac{\partial}{\partial y} v_y' \right\} = k^2 \left[\rho \gamma^2 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 - g \frac{\partial \rho}{\partial y} \right] v_y' \quad (3.3.6)$$

и соответствующий вариационный принцип

$$\gamma^2 = \frac{\int dy \left\{ g \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y'^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 \left[v_y'^2 + k^{-2} \left(\frac{\partial v_y'}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}}{\int dy \rho \left[k^{-2} \left(\frac{\partial v_y'}{\partial y} \right)^2 + v_y'^2 \right]}. \quad (3.3.7)$$

Из вариационного принципа следует, что возмущения, волновой вектор которых направлен перпендикулярно к магнитному полю, вообще не чувствуют влияния поля, в то время как возмущения с волновым вектором, параллельным полю, имеют тенденцию к стабилизации; причем в первую очередь стабилизируются наиболее коротковолновые возмущения. Если волновой вектор перпендикулярен к магнитному полю, неустойчивые возмущения вытянуты вдоль магнитных силовых линий, и силовые линии можно переставить без изменения магнитной энергии. Если же волновой вектор параллелен магнитному полю, возмущения изгибают силовые линии поля и увеличивают натяжение магнитного поля. Чем короче длина волны, тем больше изгибаются силовые линии.

Для любого волнового числа k шир стремится локализовать неустойчивость на том уровне, где $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$. Только в непосредственной близости от этого уровня силовые линии могут быть переставлены без сильного искривления.

Вопрос 3.3.1. Приводит ли изгибание магнитных силовых линий к изменению магнитного поля и, следовательно, магнитной энергии даже при отсутствии сжатия?

Вопрос 3.3.2. Чему равен инкремент неустойчивости, если равновесная плотность и магнитное поле однородны везде, за исключением одного разрыва, как и в вопросе 3.1.3? Существует ли эффект стабилизации стенками за счет токов отражения?

Вопрос 3.3.3 [7, 8]. Перевернутый маятник (с жесткой осью) дает механический аналог неустойчивости Рэлея—Тейлора. Такой маятник можно стабилизировать динамически за счет вертикального смещения его оси вверх и вниз с достаточно большой амплитудой и частотой. Если амплитуда колебаний a гораздо меньше длины маятника l , $\varepsilon \equiv a/l \ll 1$, перевернутый маятник можно стабилизировать при условии, что вынужденная частота ω_s гораздо больше собственной частоты колебаний маятника $\omega_0 \equiv \sqrt{g/l}$, $\omega_s \gg \sqrt{2}\omega_0/\varepsilon$. В то же время нормальный маятник становится неустойчивым, если его собственная частота близка к половинной гармонике внешней частоты $\omega_0 = (n/2)\omega_s$.

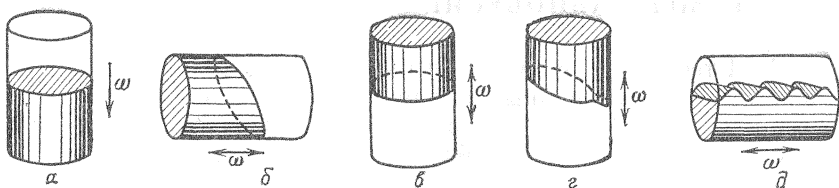


Рис. 3.4. Динамическая стабилизация неустойчивости Рэлея—Тейлора. Более плотная жидкость заштрихована. Каждая конфигурация соответствует определенной частоте, амплитуде и направлению вынужденных колебаний. Рисунки сделаны на основе фотографий эксперимента из работы [9]

(рис. 3.4). Предположим, что мы имеем ансамбль из таких маятников, часть из которых перевернута, а часть в нормальном положении и длина которых непрерывно изменяется от некоторой минимальной (при которой движение определяется затуханием) до некоторой максимальной длины. Можно ли стабилизировать перевернутые маятники без дестабилизации какого-либо из нормальных маятников?

§ 3.4. РЕЗЮМЕ

Неустойчивость Рэлея — Тейлора вызывается равновесным градиентом плотности (3.1.10) в модели несжимаемой жидкости (3.1.6), обращенным градиентом энтропии (3.2.7) в адиабатической модели (2.1.5) и обращенным градиентом температуры в изотермической модели (3.2.8). В идеально проводящей жидкости коротковолновые колебания с волновым вектором, параллельным магнитному полю, подавляются (3.3.7), в то время как на волны, распространяющиеся перпендикулярно магнитному полю, поле не влияет.

Продемонстрированы преимущества вариационного принципа типа (3.1.10) по сравнению с задачей на собственные значения (3.1.8).

§ 3.5. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Наиболее полное и подробное исследование неустойчивости Рэлея — Тейлора и связанных с ней других неустойчивостей приводится в книге:

1. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford, Clarendon Press, 1961.

Ссылки на более поздние работы и обсуждение задачи с начальными условиями даются в статье:

2. Axford R. A. Los Alamos report LA-5378, June, 1974.

Исследование неустойчивости в эксперименте обсуждается в работах:

3. Lewis D. J. — Proc. Roy. Soc. (Lond.), 1950, v. A202, p. 81—96.

4. Green T. S., Niblett G. B. F. — Nucl. Fusion, 1960, v. 1, p. 42—46.

5. Albares D., Krall N. A., Oxley C. L. — Phys. Fluids, 1961, v. 4, p. 1031—1036.

6. Rostoker N. — In: Plasma Physics in Theory and Application, W. B. Kunkel, ed. N. Y., McGraw-Hill, 1966.

Дополнительный материал по динамической стабилизации можно найти в работах:

7. Berge G. — Nucl. Fusion, 1972, v. 12, p. 99—117.

8. Wesson J. A. — Phys. Fluids, 1970, v. 13, p. 761—766.

9. Wolf G. H. — Z. Phys., 1969, Bd 277, S. 291—300.

Глава 4. МГД-РАВНОВЕСИЕ

В МГД-теории удержания плазмы в магнитном поле термин *равновесие* означает полный баланс сил. Так как любая неустойчивость стремится нарушить равновесие, то изучение неустойчивостей естественнее начать с обзора наиболее важных свойств тех равновесных конфигураций, которые будут рассматриваться ниже. В § 4.1—4.3 рассмотрены общие свойства произвольных, стационарных равновесных конфигураций со скалярным давлением. Особое значение придается обсуждению в § 4.3 параметра q . В § 4.4 выводится уравнение равновесия Грэда—Шафранова для аксиально-симметричных тороидальных конфигураций. И наконец, в § 4.5—4.7 разобраны три примера, иллюстрирующие некоторые свойства конфигураций, а также те характерные проблемы, с которыми приходится сталкиваться при расчетах равновесия.

§ 4.1. УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА СИЛ

Стандартные уравнения МГД-равновесия выглядят следующим образом:

$$\nabla p - \mathbf{J} \times \mathbf{B}; \quad (4.1.1)$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B}; \quad (4.1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.1.3)$$

Эти уравнения применимы к неподвижной ($\mathbf{v}=0$) плазме со скалярным давлением, которая находится в стационарном состоянии ($\partial/\partial t=0$) и на которую не действуют какие-либо объемные силы, такие, как сила тяжести или давление нейтрального газа. Такое приближение наиболее часто используется в токамаках или пинчах, где оно обычно хорошо обосновано.

Существует несколько других способов записи уравнений равновесия. Если силу $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ записать через магнитное давление и натяжение силовых линий как в (2.4.5), то уравнения сводятся к виду

$$\nabla_{\perp} (p + B^2/2\mu) = (1/\mu) B^2 \cdot \mathbf{k}, \quad (4.1.4)$$

где $\mathbf{k} = \widehat{\mathbf{B}} \cdot \nabla \widehat{\mathbf{B}}$ — кривизна магнитных силовых линий.

С помощью (2.4.1) получим:

$$\nabla (p + B^2/2\mu) = (1/\mu) \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}. \quad (4.1.5)$$

Запись силы $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ в виде тензора напряжений (2.4.6) или (2.4.7) дает

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \mathbf{B} - \mathbf{I} (p + B^2/2\mu) \right] = 0. \quad (4.1.6)$$

Интегрируя дивергенцию тензора напряжений по произвольному объему и используя теорему Гаусса, можно получить инте-

гральную форму уравнений равновесия

$$\oint d\mathbf{S} \cdot [(\rho + B^2/2\mu) \hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}\mathbf{B}] = 0, \quad (4.1.7)$$

где S — любая замкнутая поверхность с нормалью $\hat{\mathbf{n}}$.

Вопрос 4.1.1. Можно ли для любого магнитного поля подобрать подходящее МГД-равновесие? Можете ли Вы подобрать магнитное поле, для которого $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ не является градиентом скалярной функции?

§ 4.2. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Если следовать достаточно долго за силовой линией магнитного поля, то мы увидим, что она либо замкнется сама на себя, либо покроет поверхность, либо заполнит объем, либо уйдет из ограниченной области. В этой книге рассматривается плазма, удерживаемая магнитным полем, в которой большая часть силовых линий, бесконечно навиваясь, эргодически образует систему вложенных тороидальных поверхностей. Любая поверхность, образованная силовой линией магнитного поля, называется *магнитной поверхностью*. Говорят, что силовая линия *эргодически* покрывает магнитную поверхность, если она проходит сколь угодно близко к любой точке на этой поверхности. Тороидальная поверхность или *тороид* — это поверхность, топологически эквивалентная тору (у тора круглая дырка и круглое поперечное сечение). Вложенные одна в другую магнитные поверхности окружают силовую линию, которая называется магнитной осью. Если имеется более одной магнитной оси, как показано на рис. 4.1, то между областями, содержащими эти оси, происходит изменение топологии магнитных поверхностей; поверхность, на которой происходит изменение топологии, называется *сепаратрисой*. Проще всего определить сепаратрису, найдя x -точку на поперечном сечении магнитных поверхностей.

Вообще говоря, некоторые из магнитных силовых линий, после конечного числа обходов вдоль большого обхода тора, могут замкнуться сами на себя. Такие замкнутые силовые линии лежат на так называемых *рациональных магнитных поверхностях*, кото-

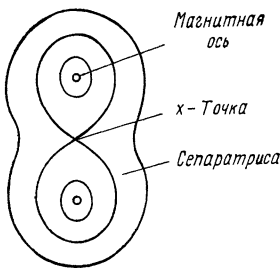


Рис. 4.1. Поперечное сечение магнитных поверхностей с двумя магнитными осями

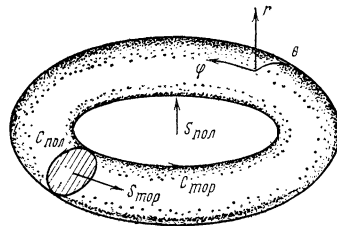


Рис. 4.2. Тороидальная магнитная поверхность, на которой показаны перегородки и контуры

рые расположены между магнитными поверхностями, эргодической покрытыми силовыми линиями, точно так же, как на числовой оси рациональные числа расположены между иррациональными. Когда на некоторой рациональной магнитной поверхности силовые линии обладают той же топологией, что и возмущения рассматриваемой неустойчивости, магнитная поверхность называется *резонансной*. В дальнейшем мы увидим, что такие поверхности играют очень важную роль в теории неустойчивостей.

Кроме простых вложенных тороидальных конфигураций имеется множество других возможностей для поведения магнитных полей. Магнитные поверхности могут разбиваться на тонкие волокна — *магнитные острова*, вьющиеся в плазме. Это явление подробно обсуждается в гл. 10. Сами эти острова могут содержать внутри себя меньшие острова; меньшие острова, в свою очередь, обладают последовательно более тонкой островной структурой и т. д. В качестве альтернативы силовая линия может квазиэргодически заполнить целый объем — в результате случайных блужданий она подойдет сколь угодно близко к любой точке в этом объеме. В другом предельном случае все силовые линии могут оказаться замкнутыми, и истинных магнитных поверхностей тогда не будет. Каждая из этих возможностей анализировалась в литературе, но в настоящей книге не рассматривается.

Рассмотрим некоторую тороидальную магнитную поверхность и введем перегородки, одну перекрывающую отверстие тороида $S_{\text{пол}}$, а другую — его поперечное сечение $S_{\text{тор}}$ (рис. 4.2). *Тороидальный поток* через любое сечение тороида $S_{\text{тор}}$ равен

$$\psi_{\text{тор}} \equiv \int_{S_{\text{тор}}} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \text{поток вдоль большого обхода}, \quad (4.2.1)$$

а *полоидальный поток* через любое сечение, перекрывающее отверстие тороида, $S_{\text{пол}}$, дается выражением:

$$\psi_{\text{пол}} \equiv \int_{S_{\text{пол}}} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \text{поток в направлении малого обхода}. \quad (4.2.2)$$

В § 2.2 показано, что через любую поверхность, натянутую на один и тот же контур, проходит одинаковый магнитный поток. Так как силовые линии магнитного поля всюду направлены по касательной к тороидальной магнитной поверхности, то поток магнитного поля через такую поверхность отсутствует. Таким образом, через любые топологически эквивалентные контуры ($S_{\text{тор}}$ или $S_{\text{пол}}$) на магнитной поверхности проходит один и тот же магнитный поток. Отсюда следует, что обе величины $\psi_{\text{тор}}$ и $\psi_{\text{пол}}$ являются поверхностными величинами. *Поверхностной величиной* называется любая переменная, которая постоянна на магнитной поверхности. И наоборот, можно показать, что все поверхности, на которых постоянны $\psi_{\text{тор}}$ или $\psi_{\text{пол}}$, являются магнитными поверхностями.

В теории МГД-равновесия используются и многие другие поверхностные величины. Например, из равенства $\mathbf{V} \cdot \nabla p = 0$, которое является прямым следствием уравнения $\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$, следует, что давление является поверхностной величиной. Если давление изменяется от поверхности к поверхности так, что $|\nabla p| \neq 0$, за исключением отдельных магнитных поверхностей, то тороидальный и полоидальный токи также являются поверхностными величинами:

$$I_{\text{тор}} \equiv \int_{S_{\text{тор}}} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu} \oint_{C_{\text{пол}}} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B} = \text{полный ток, протекающий вдоль большого обхода внутри магнитной поверхности;} \quad (4.2.3)$$

$$I_{\text{пол}} \equiv \int_{S_{\text{пол}}} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu} \oint_{C_{\text{тор}}} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B} = \text{полный ток, протекающий через отверстие тороидальной магнитной поверхности.} \quad (4.2.4)$$

Это следует из условия $\mathbf{J} \cdot \nabla p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$, которое означает, что ток не течет поперек магнитных поверхностей.

Вопрос 4.2.1. Если давление однородно на любой магнитной поверхности, то каким образом плазма удерживается в зеркальной ловушке?

Отметим, что в работах с математическим уклоном часто используются введенные Крускалом и Кулсрудом [1] стандартные обозначения: ψ (или Ψ) и I для тороидального магнитного потока и тока внутри магнитной поверхности; χ и J для полоидального магнитного потока и тока, проходящих между магнитной осью и магнитной поверхностью. Однако в литературе, посвященной аксиально-симметричным тороидальным конфигурациям, ψ обозначает потоковую функцию, которая пропорциональна потоку полоидального магнитного поля. Попытаемся исключить эту путаницу, используя индекс u потоков и токов как полоидальных, так и тороидальных, оставив, когда это потребует, обозначение ψ за потоковой функцией.

Кроме того, при определении потока полоидального поля и полоидального тока воспользуемся не перегородкой между магнитной осью и магнитной поверхностью, а поверхностью, перекрывающей отверстие тороида. В этом случае поток полоидального поля включает в себя магнитный поток индуктора, а полоидальный ток включает ток в катушках тороидального поля. При таком определении не нужно привязываться к магнитной оси.

§ 4.3. ПАРАМЕТР q

Параметр q , который иногда называют «запасом устойчивости», определяется как отношение числа оборотов силовой линии магнитного поля вдоль тора к числу оборотов по малому обходу, в пределе бесконечного числа оборотов:

$$q \equiv \lim \frac{\text{число оборотов по большому обходу}}{\text{число оборотов по малому обходу}}. \quad (4.3.1)$$

Так как силовые линии не пересекаются, параметр q одинаков для всех силовых линий на магнитной поверхности. Таким образом, q — это поверхностная величина. В дальнейшем мы увидим, что эта величина играет чрезвычайно важную роль в теории МГД-неустойчивостей и часто встречается как в условиях устойчивости, так и в выражениях для инкрементов.

Иногда q вычисляют, следя за магнитной силовой линией и находя отношение числа оборотов. Однако в общем случае лучше использовать иное выражение:

$$q = d\psi_{\text{тор}}/d\psi_{\text{пол}}, \quad (4.3.2)$$

которое применимо для любой замкнутой геометрии магнитного поля.

Формальный вывод (4.3.2), использующий специальную систему координат, в которой силовые линии магнитного поля являются прямыми, будет обсуждаться в § 7.2. Однако Крускал [2] предложил простой вывод (4.3.2), который приводится здесь.

Выделим слой соседних магнитных поверхностей и выпрямим его так, как это показано на рис. 4.3. Поверхности, отмеченные V_1 и V_2 , — это тороидальные магнитные поверхности, а φ и θ — произвольные тороидальный и полоидальный углы. Сначала рассмотрим частный случай, при котором все силовые линии магнитного поля замыкаются на себя при одном обходе тороида, так что $q=1$, и нет шпир. Рассмотрим перегородку между магнитными поверхностями, параллельную магнитному полю; на рис. 4.3 она заштрихована. Теперь будем изгибать ее до тех пор, пока она не совпадет с правой боковой стороной и нижней гранью выделенного объема. Тороидальный магнитный поток, проходящий через боковую сторону, равен $+d\psi_{\text{тор}}$, а полоидальный поток, проходящий через нижнюю грань, равен $-d\psi_{\text{пол}}$. Через боковые стороны и первоначальную перегородку поток не проходит, так как эти поверхности всюду параллельны магнитному полю. Следовательно, весь поток, входящий в этот объем через нижнюю грань, должен выходить через боковую поверхность

$$d\psi_{\text{пол}} = d\psi_{\text{тор}} \quad \text{или} \quad d\psi_{\text{тор}}/d\psi_{\text{пол}} = 1 = q.$$

Рассуждая так же в случае, когда силовая линия делает n оборотов по большому обходу (вдоль φ) на каждые m оборотов по малому обходу (вдоль θ), можно получить выражение для q на рациональных магнитных поверхностях:

$$d\psi_{\text{тор}}/d\psi_{\text{пол}} = n/m = q.$$

После этого равенство (4.3.2) следует из предельного перехода к иррациональным значениям q ; такие рассуждения, основанные на рассмотрении

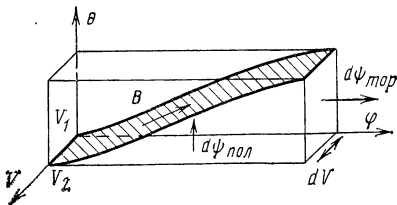


Рис. 4.3. Иллюстрация к выводу Крускалом формулы $q = d\psi_{\text{тор}}/d\psi_{\text{пол}}$

бесконечно тонких слоев, применимы и при наличии шира, т. е. когда $dq(V)/dV \neq 0$.

Вопрос 4.3.1. Допустим, что полоидальная компонента магнитного поля обращается в нуль на внутренней части аксиально-симметричного тора, где остается лишь тороидальное поле. Силовые линии огибают тор с внешней стороны, где на той же магнитной поверхности полоидальная компонента не равна нулю. Могут ли эти силовые линии на одной и той же магнитной поверхности иметь разные значения q ?

Вопрос 4.3.2. Чему равно q на магнитной оси? Отличается ли оно от q для силовых линий в непосредственной близости от магнитной оси?

Часто параметр q путают с наклоном магнитной силовой линии. Наклон — это локальная величина, которая может меняться от точки к точке на магнитной поверхности, в то время как q описывает топологические свойства силовых линий и всюду одинаково на магнитной поверхности. Наклон силовой линии равен обратному значению q только для прямого кругового цилиндра.

В литературе часто используется и другая величина, угол вращательного преобразования, значение которой в точности равно обратному значению q :

$$\chi = 1/q. \quad (4.3.3)$$

Угол вращательного преобразования, выраженный в радианах, определяется как $\chi = 2\pi/q$.

§ 4.4. УРАВНЕНИЕ ГРЭДА — ШАФРАНОВА

Существует три типа конфигураций с произвольной формой поперечного сечения, из описания которых выпадает по крайней мере одна переменная, — это прямой цилиндр, аксиально-симметричный тороид и конфигурация, обладающая винтовой симметрией. В каждом из этих трех случаев с помощью введения потоковой функции ψ уравнения равновесия можно свести к одному дифференциальному уравнению в частных производных с одной неизвестной функцией. Поскольку для любых заданных профилей и граничных условий такие преобразования существенно упрощают задачу расчета равновесия, то во многих лабораториях всего мира сейчас используют стандартные численные программы, основанные на решении уравнений, преобразованных подобным образом.

Этот параграф посвящен выводу и обсуждению уравнения Грэда — Шафранова, к которому приводятся уравнения равновесия для аксиально-симметричного тороида. В конце параграфа помещена таблица приведенных уравнений для всех трех типов конфигураций, обладающих соответствующей симметрией.

Для вывода уравнения Грэда — Шафранова воспользуемся цилиндрической си-

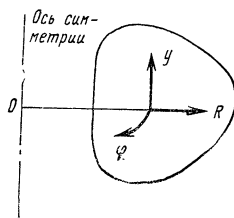


Рис. 4.4. Система координат, которая используется для расчета аксиально-симметричного тороидального равновесия

стеймой координат (R, y, φ) , ось которой совпадает с центральной осью тороида, как показано на рис. 4.4. Так как тороидальный угол φ не входит в уравнение $(\partial/\partial\varphi=0)$, то полоидальное магнитное поле можно выразить с помощью только одной тороидальной компоненты векторного потенциала A_φ :

$$\mathbf{B} = \nabla \times (A_\varphi \hat{\varphi}) + B_\varphi \hat{\varphi}. \quad (4.4.1)$$

Вместо векторного потенциала обычно используют функцию потока ψ , определяемую равенством:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times (\psi \cdot \nabla \varphi) + RB_\varphi \nabla \varphi = \nabla \psi \times \nabla \varphi + B_\varphi \cdot \hat{\varphi} = \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{\mathbf{R}} - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \hat{\mathbf{y}} + B_\varphi \hat{\varphi}. \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Подставляя (4.4.2) в (4.2.2), можно видеть, что функция потока пропорциональна полоидальному магнитному потоку:

$$\psi = \psi_{\text{пол}}/2\pi. \quad (4.4.3)$$

Итак, ψ — это поверхностная величина, которую вообще говоря, можно использовать для маркировки магнитных поверхностей.

Выражение для плотности тока следует из (4.4.2)

$$\mu \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\hat{\varphi}}{R} \Delta^* \psi + \nabla (R \cdot B_\varphi) \times \nabla \varphi, \quad (4.4.4)$$

где Δ^* — специальный оператор, определенный как

$$\Delta^* \psi \equiv R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}. \quad (4.4.5)$$

Из условия $\mathbf{B} \cdot \nabla p = \mathbf{B} \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$ следует, что давление — это поверхностная величина, так что

$$p = p(\psi). \quad (4.4.6)$$

Теперь из уравнения $\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$

$$\mu p'(\psi) \nabla \psi = -R^{-2} \Delta^* \psi \nabla \psi - RB_\varphi (1/R^2) \nabla (RB_\varphi) \quad (4.4.7)$$

следует, что вектор $\nabla (RB_\varphi)$ должен быть направлен вдоль $\nabla \psi$. Таким образом, произведение RB_φ — это поверхностная величина:

$$RB_\varphi = I(\psi). \quad (4.4.8)$$

Отметим, что величина $I(\psi)$ пропорциональна полному полоидальному току

$$I(\psi) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{S_{\text{пол}}} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}_{\text{пол}} = \mu \frac{I_{\text{пол}}(\psi)}{2\pi}. \quad (4.4.9)$$

Теперь из (4.4.7) следует уравнение Грэда — Шафранова:

$$-\Delta^* \psi = R^2 \mu p'(\psi) + II'(\psi); \quad (4.4.10)$$

$$\Delta^* \equiv R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Член $\Delta^*\psi$ в левой части (4.4.10) представляет собой ту часть в балансе сил, действующих на плазму, которая возникает из-за взаимодействия тороидального тока с полоидальным магнитным полем ($-\Delta^*\psi = RJ_\phi$), в то время как слагаемое II' в правой части (4.4.10) описывает взаимодействие полоидального тока с тороидальным магнитным полем.

Стандартный метод расчета аксиально-симметричного равновесия в токамаке заключается в задании функций $p = p(\psi)$ и $I = I(\psi)$ вместе с граничными условиями или заданными извне условиями на ψ и затем в обращении оператора типа Лапласа $\Delta^*\psi$ для получения $\psi = \psi(R, y)$.

Когда профили или граничные условия нелинейны, производят итерации до тех пор, пока ψ не сойдется к решению. Такая процедура в некотором смысле неудобна, поскольку функции источников $p'(\psi)$ и $II'(\psi)$ должны быть заданы как функции ψ , зависимость которых от координат не известна до тех пор, пока уравнение не решено. Вообще говоря, для тора с конечным аспектным отношением оказывается невозможным сначала задать $\psi(R, y)$, а затем найти $p(\psi)$ и $I(\psi)$ [29]. Только бесконечно малая часть из всех возможных потоковых функций и магнитных полей является подходящей для МГД-равновесия.

В удержании плазмы могут участвовать как тороидальный, так и полоидальный токи. Ту долю, которую в удержание вносит полоидальный ток, можно выразить с помощью диамагнетизма μ_J и $\beta_{\text{пол}}$, которые определяются как

$$\mu_J \equiv \frac{1}{2} \langle I_{\text{граница}}^2 - I^2(\psi) \rangle / \bar{B}_{\text{пол}}^2 \langle R \rangle^2; \quad (4.4.11)$$

$$\beta_{\text{пол}} \equiv 1 + \mu_J, \quad (4.4.12)$$

где

$$\langle \dots \rangle \equiv \int_{S_{\text{тор}}} dS \dots \Big/ \int_{S_{\text{тор}}} dS \quad (4.4.13)$$

означает усреднение по поперечному сечению плазмы и

$$\bar{B}_{\text{пол}} \equiv \oint_{C_{\text{пол}}} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B}_{\text{пол}} \Big/ \oint_{C_{\text{пол}}} d\mathbf{l} \quad (4.4.14)$$

среднее по полоидальному обходу плазмы. Эти определения не стандартны [7, 9, 26]*.

Уравнение Грэда — Шафранова имеет три интересных предельных случая. В первом из них полоидальный ток в плазме от-

* Разные авторы дают различающиеся определения параметров μ_J и $\beta_{\text{пол}}$. Как и приведенные здесь, они не всегда инвариантны (зависят от выбора контура сечения). Инвариантные определения предложены в [7—9]. — *Примеч. ред.*

существует [$II'(\psi) = 0$], тороидальное магнитное поле равно вакуумному, которое спадает, как $1/R$ ($RB_\phi = R_0 B_{\phi 0}$), а давление целиком удерживается за счет взаимодействия тороидального тока и полоидального поля, создаваемого этим током. Этот случай, с $\beta_{\text{пол}} = 1$, изучен очень подробно. Во втором предельном случае ток течет строго вдоль магнитного поля, давление равно нулю или по крайней мере однородно [$\nabla p = p'(\psi) = 0$], и магнитное удержание вообще отсутствует. Уравнение Грэда — Шафранова сводится к уравнению — $\Delta^* \psi = II'(\psi)$. Любая область плазмы, где выполнено это условие, называется *бессиловой областью*. Если это справедливо во всем объеме, то $\beta_{\text{пол}} = 0$. И наконец, в третьем предельном случае давление плазмы почти полностью удерживается взаимодействием полоидального тока с тороидальным магнитным полем ($|II'(\psi)| \gg |\Delta^* \psi|$), а тороидальный ток служит лишь для контроля над положением плазмы. Такая конфигурация с высоким $\beta_{\text{пол}}$, которая иногда называется токамаком или пинчем с большим β , будет подробно обсуждаться в гл. 8. Тороидальное поле как функция большого радиуса для каждого из этих трех случаев показано на рис. 4.5.

Вопрос 4.4.1. Может ли тороидальное равновесие поддерживаться только полоидальными токами? Можно ли поддерживать его без внешних полей или без токов отражения, протекающих в стенках?

Вопрос 4.4.2. Можем ли мы, задавшись какой-либо функцией $\psi = \psi(R, y)$ с простым максимумом, решить уравнение Грэда — Шафранова относительно $p(\psi)$ и $I(\psi)$?

Вопрос 4.4.3. В. Д. Шафрановым [4] был предложен простой пример точного тороидального равновесия, который в дальнейшем использовался в работе [30], а также и другими авторами:

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 \{R^2 - a^2 y^2 - \alpha (1 - R^2)^2\}, \quad (4.4.15)$$

где a^2 , α , ψ_0 и ψ_1 — константы. Это равновесие следует из уравнения Грэда — Шафранова, в котором использованы зависимости

$$\begin{aligned} II'(\psi) &= 2a^2 \psi_1; \\ \mu p'(\psi) &= 2(4\alpha - 1) \psi_1. \end{aligned}$$

В качестве границы плазмы (где $p=0$) можно выбрать любую магнитную поверхность, форму которой можно регулировать с помощью изменения параметров. Где, по отношению к границе, расположена магнитная ось? Где полоидальное магнитное поле больше — на внутренней или внешней частях тороида? Насколько вытянутым может быть поперечное сечение?

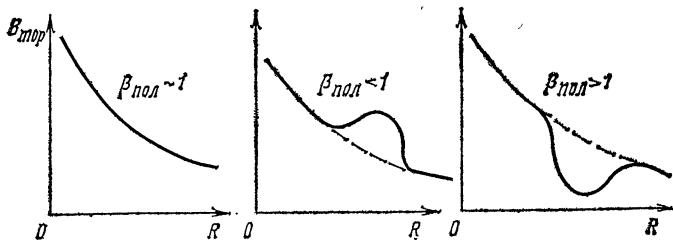


Рис. 4.5. Зависимости $B_{\text{тор}}$ от большого радиуса в различных предельных случаях, соответствующих разным значениям $\beta_{\text{пол}}$

§ 4.5. ЦИЛИНДР С ВЫТЯНУТЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ КАК ПРИМЕР БИФУРКАЦИИ

Прямой круговой цилиндр является одним из немногих примеров равновесия, которые могут поддерживать свою форму целиком за счет токов, протекающих по плазме. Для того чтобы изменить форму его сечения, необходимо использовать внешнее магнитное поле, которое сжимает или растягивает плазму. Внешнее поле требуется в том случае, когда необходимо вытянуть поперечное сечение, согнуть шнур в тор или создать на нем перетяжки. Для того чтобы продемонстрировать, каким образом можно использовать внешнее магнитное поле для формирования сечения плазмы, в этом параграфе будет рассмотрен простой пример. Кроме того, будет показано, что форма определяется не только внешними полями.

Фактически, сечение плазмы с током можно вытянуть двумя способами — растягивая или сдавливая ее. Для растягивания плазмы используются внешние токи, протекающие в том же направлении, что и плазменный ток, как показано на рис. 4.6, а. При этом магнитное поле, а следовательно, магнитное давление и натяжение силовых линий уменьшаются на тех сторонах плазмы, которые обращены к внешним токам. Плазма выпучивается наружу до тех пор, пока кривизна и соответствующее натяжение магнитных силовых линий не возрастут, а градиент давления плазмы в этом направлении не уменьшится настолько, что эти силы придут в равновесие. Между плазмой и проводниками магнитные поля направлены навстречу друг другу и поэтому имеются точки застоя (x -точки сепаратрисы), в которых полоидальное магнитное поле равно нулю. При увеличении тока в проводниках точки застоя приближаются к плазме и сечение плазмы становится более вытянутым.

Магнитная поверхность, проходящая через точку застоя, называемая сепаратрисой, обычно разделяет область хорошего удержания

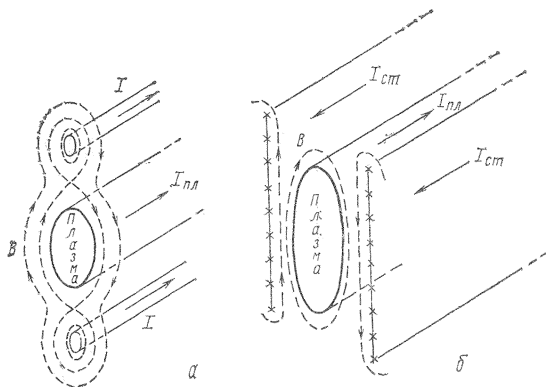


Рис. 4.6. Удлинение поперечного сечения плазмы с помощью вытягивания (а) и сжатия с двух сторон (б)

жания плазмы от области, в которой силовые линии уходят на стенку, так что плазма удерживается здесь очень плохо. Кроме того, если внешние токи слишком большие, плазма становится неустойчивой по отношению к смещению по направлению к тому или другому проводнику.

Другая возможность заключается в сдавливании плазмы стенками из токов, направленных навстречу току в плазме и расположенных с двух сторон от плазмы, как на рис. 4.6, б. При этом магнитное поле по обе стороны от плазмы усиливается, так что возросшее магнитное давление сжимает плазму. Подробнее этот метод обсуждается в § 4.6.

Вопрос 4.5.1. Если бы все внешние проводники, обсуждавшиеся выше, были бы помещены на некоторый контур, окружающий плазму, то вариант со сжатием плазмы можно было бы преобразовать в вариант, эквивалентный растягиванию за концы, просто добавлением продольного, однородно распределенного по контуру тока, который сам по себе не влияет на плазму. Существует ли с этой точки зрения какая-либо разница между сжатием и растяжением плазмы?

В примере, который рассмотрен ниже, воспользуемся простейшей конфигурацией. Плазма имеет приблизительно эллиптическую форму сечения с однородным распределением плотности продольного тока. Форму сечения плазмы обеспечивает внешнее квадратное магнитное поле. Этот простой пример можно описать ана-

Т а б л и ц а 4.1. Приведенные уравнения равновесия

Прямой цилиндр	Аксально-симметричный тор	Винтовая симметрия
(x, y, z) $\partial/\partial z = 0$ $B = \frac{\partial\psi}{\partial y} \hat{x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \hat{y} + B_z \hat{z}$ $\rho = \rho(\psi)$ $B_z = B_z(\psi)$ $-\nabla^2\psi = \mu\rho'(\psi) + B_z B_z'(\psi)$	(R, y, φ) $\partial/\partial\varphi = 0$ $B = \frac{1}{R} \frac{\partial\psi}{\partial y} \hat{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial\psi}{\partial R} \hat{y} + B_\varphi \hat{\varphi}$ $\rho = \rho(\psi)$ $RB_\varphi = I(\psi)$ $-\Delta^*\psi = R^2\mu\rho'(\psi) + II'(\psi)$ $\Delta^*\psi \equiv R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial\psi}{\partial R} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$	(r, θ, z) $u \equiv \theta - kz$ $B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial u}$ $B_\theta - krB_z = + \frac{\partial\psi}{\partial r}$ $\rho = \rho(\psi)$ $krB_\theta + B_z = H(\psi)$ $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{1+k^2r^2} \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} = \frac{2kH + HH'(\psi)}{1+k^2r^2} + \mu\rho'(\psi)$

литически, а представленные методы можно использовать и для более общих конфигураций.

Если прямой плазменный цилиндр имеет однородное распределение плотности тока, то уравнение для полондальной функции потока (табл. 4.1) можно записать в виде

$$-\nabla^2\psi = \mu\rho'(\psi) + B_z B_z'(\psi) = \mu J_{z0}. \quad (4.5.1)$$

Подходящее решение этого уравнения для функции потока и соответствующего магнитного поля выглядит следующим образом:

$$\psi = \psi_0 - \frac{\mu}{2} \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2} J_{z0} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right); \quad (4.5.2)$$

$$\mathbf{B} = - \frac{a^2 b^2 \mu}{b^2 + a^2} J_{z0} \left[\frac{y}{b^2} \hat{x} - \frac{x}{a^2} \hat{y} \right] + B_{z0} \hat{z}. \quad (4.5.3)$$

По плазме, ограниченной магнитной поверхностью, которая в данном случае представляет собой эллипс с большой полуосью b и малой a , протекает однородно распределенный ток. Давление или комбинация давления плазмы и давления продольного магнитного поля выразится в виде

или

$$p(\psi) = \left\{ \begin{array}{l} J_{z0} (\psi - \psi_{rp}) \\ 0 \quad \psi < \psi_{rp} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} p(\psi) - \frac{1}{2\mu} (B_z^2{}_{rp} - B_z^2(\psi)) = \\ \frac{1}{2} \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2} J_{z0} \left[1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right] \\ 0 \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1. \end{array} \right\} \quad (4.5.4)$$

Величину q на длине $L = 2\pi/k$ можно определить с помощью (4.3.2):

$$q(\psi) = \frac{k B_z(\psi)}{\mu J_{z0}} \frac{b^2 + a^2}{ba}. \quad (4.5.5)$$

Многим исследователям было бы достаточно этого формально-го решения уравнений равновесия плазмы. В таком виде его можно использовать для исследования устойчивости конфигурации и процессов переноса в плазме, таких, как диффузия и перенос тепла. Однако нас интересует, каким образом меняется форма плазмы под действием внешних токов. С этой целью необходимо выяснить, какая часть магнитного поля индуцируется токами в плазме, а какая — внешними токами.

Поле, создаваемое одним плазменным током, можно определить, интегрируя функцию Грина по распределению тока. Функция Грина — это просто величина потока в точке (x, y) , создаваемая продольным точечным током, расположенным в другой точ-

ке (x_1, y_1) :

$$\psi = \mu \frac{J(x_1, y_1)}{4\pi} \ln \frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{r_0^2}, \quad (4.5.6)$$

где r_0 — произвольный радиус, используемый для обезразмеривания аргумента логарифма. После интегрирования по плазменному току полученный результат имеет следующее разложение в ряд Тейлора вблизи магнитной оси:

$$\psi_{\text{пл. ток}} = \psi_0 - \frac{\mu}{2} \frac{J_{z0}}{b+a} (bx^2 + ay^2) + \dots, \quad (4.5.7)$$

а соответствующее полоидальное магнитное поле дается выражением

$$\mathbf{B}_{\text{пол}} = \frac{\mu J_{z0}}{b+a} (bx\hat{y} - ay\hat{x}) + \dots \quad (4.5.8)$$

Отметим, что магнитные поверхности собственного поля тока в плазме не соответствуют форме плазмы. Заметим, кроме того, что магнитное поле, необходимое для равновесия плазмы (4.5.3), должно быть минимальным вблизи заострений плазменного эллипса, в отличие от собственного поля (4.5.8). Для равновесия к собственному полю тока необходимо добавить поле внешних токов, так, чтобы их сумма совпала с равновесным полем. Через функцию потока это можно записать в виде

$$\psi_{\text{равн}} = \psi_{\text{пл. ток}} + \psi_{\text{внешн. ток}} \quad (4.5.9)$$

В рассматриваемом здесь конкретном примере достаточно использовать квадрупольное поле, которое представляет собой низшую гармонику в разложении поля четырех проводников, параллельных плазменному цилиндру, с чередующимися токами \hat{I}_q . Если эти проводники расположены на радиусе r_0 от центра плазмы, их функцию потока можно аппроксимировать с помощью выражения

$$\psi_q = \mu \frac{I_q}{\pi} \left[\left(\frac{x}{r_0} \right)^2 - \left(\frac{y}{r_0} \right)^2 + O \left(\left(\frac{x}{r_0} \right)^6, \left(\frac{y}{r_0} \right)^6 \right) \right]. \quad (4.5.10)$$

Из подстановки (4.5.2), (4.5.7) и (4.5.10) в (4.5.9) видно, что для создания нужной комбинации функций потока токи и размеры должны удовлетворять следующему соотношению:

$$I_q = \frac{1}{2} \frac{(b/a)^2 - 1}{(b/a)^2 + 1} \frac{1}{(b/a + 1)^2} \frac{r_0^2}{a^2} I_{\text{пл}}, \quad (4.5.11)$$

где $I_{\text{пл}} = labJ_{z0}$ — полный плазменный ток. Это соотношение следует из баланса мультипольных членов низшего порядка разложения. Члены более высокого порядка компенсируются небольшим изменением формы плазмы или увеличением числа внешних проводников.

Из соотношения (4.5.11) видно, что без внешних токов вытянутость отсутствует ($b/a=1$). С ростом внешних токов вытянутость увеличивается ($b/a>1$). Однако, начиная с некоторой вытя-

нутости (более строгое рассмотрение [13] дает $b/a=2,9$), для дальнейшего увеличения вытянутости внешний ток должен уменьшаться. Это происходит потому, что внешнее квадрупольное магнитное поле возрастает с радиусом быстрее, чем магнитное поле плазмы возрастает с вытянутостью. Важный момент заключается в том, что такое равновесие плазмы определено неоднозначно, даже если заданы все токи и ширина плазмы. При изменении параметров появляется точка *бифуркации*, в которой равновесие может пойти по одному из двух путей. Обычно точка бифуркации отделяет класс устойчивых равновесий от неустойчивых. Стандартный механический пример бифуркации — это нагруженный стальной стержень. При нагрузке выше критической стержень может оставаться в равновесии, в котором он будет прямым, или перейти в новое положение равновесия, в котором он будет изогнутым. Прямая форма неустойчива, а изогнутая снова устойчива.

Бифуркация — это важное понятие в нелинейной теории МГД-неустойчивостей. Под влиянием некоторых неустойчивостей плазменный шнур приобретает винтовую структуру, которая может быть новым равновесием. Если параметры плазмы изменяются, то точки в пространстве параметров, где плазма нейтрально устойчива, являются точками бифуркации. Вблизи от таких точек устойчивость плазмы можно исследовать, рассматривая близкие равновесия с учетом законов сохранения. Такой подход становится несправедливым, если неустойчивость приводит к релаксационным колебаниям, турбулентности или полному распаду плазмы.

Вопрос 4.5.2. Что произойдет в том примере, который рассматривался в этом параграфе, если квадрупольный ток увеличить выше максимального, допустимого равновесием? Будет ли плазма с вытянутым сечением устойчива по отношению к дальнейшему вытягиванию, даже если токи согласованы с условиями равновесия?

§ 4.6. ПЛАЗМА, ЗАЖАТАЯ МЕЖДУ ПРОВОДЯЩИМИ СТЕНКАМИ

При использовании внешних проводников, растягивающих плазму так, как описано в § 4.5, возникает ряд серьезных проблем. При попытках увеличить вытянутость к границе плазмы приближается сепаратриса и развивается неустойчивость по отношению к вертикальным смещениям. Многие годы исследователи, изучающие различные варианты этого метода создания вытянутости сечения, сталкивались с этой трудностью (оставим пока в стороне конфигурацию типа «Дублет»). Тогда Беккер и Кадиш [15, 17] нашли аналитический пример сильновытянутого равновесия вообще без сепаратрисы, что, казалось, должно было приводить к хорошей вертикальной устойчивости плазмы, а фон Хагенау [16] нашел равновесие с теми же свойствами с помощью численных методов*. Забавно, что первый пример Беккера полностью опи-

* Аналогичное решение было найдено В. А. Намиотом (Журн. техн. физ., 1973, т. 43, с. 853). — *Примеч. ред.*

сан в книге Морса и Фешбаха [31, с. 1247—1250] в разд. «Переменный конденсатор». Этот пример достаточно прост, но перед тем как заняться им, мы должны изучить некоторые свойства МГД-равновесия в модели с поверхностным током.

В модели поверхностного тока весь плазменный ток протекает по поверхности плазмы. Внутри плазмы давление однородно и скачком меняется на границе. Магнитное поле совпадает с вакуумным везде, за исключением разрыва на поверхности плазмы. Скачки в давлении и магнитном поле можно связать, рассмотрев интегральную форму уравнений равновесия (4.1.7), если интегрирование проводится по небольшому плоскому элементу объема, охватывающему границу плазмы. Так как магнитное поле параллельно поверхности плазмы, то оно параллельно основаниям тонкой коробочки, так что $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B} = 0$. Таким образом, для бесконечно малого элемента объема уравнение (4.1.7) дает соотношение

$$(p + B^2/2\mu)_{\text{вн}} = (p + B^2/2\mu)_{\text{внешн}}, \quad (4.6.1)$$

причем p обычно принимают равным нулю снаружи от плазмы. Плотность тока на поверхности плазмы \mathbf{J}_s легко оценить, вычисляя интеграл от $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}/\mu$ по контуру, окружающему небольшой сегмент поверхности плазмы:

$$\mu \mathbf{J}_s = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{B}_{\text{внешн}} - \mathbf{B}_{\text{вн}}). \quad (4.6.2)$$

Вопрос 4.6.1. Физический смысл равенства (4.6.1) состоит в том, что разность давления плазмы уравнивается разностью магнитного давления с двух сторон от границы плазмы. Почему при этом не играют роли силы, связанные с кривизной магнитного поля?

Вопрос 4.6.2. Рассмотрим круглый тор, в котором плазма удерживается только поверхностным током. Полоидальное поле внутри плазмы отсутствует, а тороидальное поле изменяется как $1/R$, испытывая скачок по амплитуде при переходе через поверхность плазмы. Все поля можно вычислить аналитически. Каким должен быть скачок B_ϕ^2 , чтобы полоидальное магнитное поле обратилось в нуль на внутреннем обводе тора? Как меняется это условие в зависимости от аспектного отношения? Каковы максимально допустимые значения $\beta \equiv p/B_\phi^2/2\mu$ и $\beta_{\text{пол}}$ при этих условиях?

Рассмотрим теперь аналогию между равновесием плазмы с вытянутым сечением и задачей о переменном конденсаторе, которая была решена Морсом и Фешбахом. Заменяем электрический потенциал функцией потока полоидального магнитного поля, а перпендикулярное эквипотенциальным поверхностям электрическое поле — магнитным, направленным параллельно магнитным поверхностям. Электрический заряд заменяется плотностью продольного тока (направленного от читателя). Конфигурация состоит из полубесконечной пластины (магнитной поверхности), расположенной между двумя бесконечными плоскостями (магнитными поверхностями). Для определения эквипотенциальных поверхностей (маг-

нитных поверхностей) и электрического поля (магнитного поля) в пространстве между пластинами Морс и Фешбах использовали метод конформных отображений. Было показано, что на магнитной поверхности, проходящей в точности на половине расстояния между внутренней и внешними пластинами, магнитное поле является однородным. Вне этой магнитной поверхности ничего не изменится, если ток, протекающий по внутренней пластине, однородно распределить на этой выделенной магнитной поверхности. Заменяя теперь все то, что расположено внутри этой магнитной поверхности, плазмой с однородным давлением и продольным полем, получаем точное решение уравнений МГД-равновесия. Плазма имеет полубесконечную длину, но между ней и стенкой сепаратриса отсутствует. Ток протекает по тем частям стенок, которые расположены напротив плазмы. Отметим, что ширина плазмы должна составлять половину расстояния между стенками.

Вопрос 4.6.3 [17]. Как изменится магнитный поток между плазмой и стенкой, если в модели прямого, крутового плазменного цилиндра с поверхностным током мы изменим отношение радиуса плазмы к радиусу стенки при фиксированном магнитном поле B на плазме? Будем теперь вытягивать сечение плазмы и стенки, оставляя неизменными давление плазмы, магнитное поле на поверхности плазмы и поток между плазмой и стенкой. В случае сильновытянутого сечения плазмы магнитное поле между границей плазмы и стенкой фактически однородно. Чему равна минимально возможная ширина плазменного шнура? Использование стенок различной формы приводит к небольшому изменению ширины шнура.

Фон Хагенау с помощью решения уравнения Грэда — Шафранова получил решение в прямоугольной области при заданном значении ψ на границе области. (Ниже будет рассмотрен случай кожуха с $\psi = \text{const}$ на его границе.) Параметром задачи была выбрана высота плазмы. Вне плазмы функции $p'(\psi)$ и $I'(\psi)$ принимались равными нулю. На рис. 4.7 показана найденная зависимость ширины сечения плазмы от ее высоты для различных профилей тока. Когда высота стремится к нулю, ширина плазмы так же стремится к нулю, и плазма имеет почти круглое сечение (левый нижний угол рис. 4.7). В другом предельном случае плазма простирается до стенки (стенка — это магнитная поверхность) так, что вытянутость плазмы равна вытянутости стенки (правый верхний угол рис. 4.7). Между этими пределами имеется широкое плато, где ширина плазмы практически не зависит от ее высоты. Как видно из рис. 4.7, это четко проявляется уже при отношении сторон прямоугольного кожуха 4 : 1. С ростом отношения сторон кожуха ширина плато увеличивается. В области плато ширина плаз-

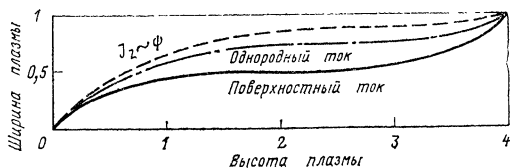


Рис. 4.7. S-образные кривые фон Хагенау, показывающие зависимость ширины плазмы от ее высоты в сильно вытянутом прямоугольном кожухе

мы зависит от профиля тока. Если весь ток протекает по поверхности плазмы, то ширина плазмы в точности равна половине ширины кожуха. Если ток однородно распределен в плазме, ширина плазмы составляет 0,73 ширины кожуха. Если ток сконцентрирован вблизи от магнитной оси в центре плазмы, ширина плазмы фактически равна ширине кожуха, независимо от высоты плазмы или кожуха. Это означает, что, для того чтобы вытянуть сечение плазмы, витки должны располагаться вблизи границы плазмы. То, что витки должны находиться близко к плазме, делает этот способ вытягивания менее привлекательным для экспериментов по управляемому термоядерному синтезу.

Ситуация оказывается еще хуже, если мы рассмотрим магнитные поверхности, расположенные глубоко внутри плазмы. Чем сильнее пикирован ток вблизи магнитной оси, тем ближе форма центральных магнитных поверхностей к окружностям, независимо от того, насколько близко расположена стенка к плазме. Это согласуется с картиной, представленной на рис. 4.7. Эффективная ширина токового канала слишком мала для того, чтобы внешние токи могли вытянуть его сечение; фактически это соответствует для S-образных кривых фон Хагенау левому нижнему углу рис. 4.7.

§ 4.7. РАВНОВЕСИЕ ПЛАЗМЫ В ТОКАМАКЕ

Предоставленная самой себе тороидальная плазма будет стремиться расширяться по *большому* радиусу под действием сил, которые рассмотрены в этом параграфе. В экспериментах на токамаках для компенсации этих сил используют внешнее вертикальное магнитное поле, так что векторное произведение тороидального тока плазмы и приложенного поля приводит к силе, направленной внутрь. Если плазму окружает хорошо проводящий кожух, то плазма прижимается к стенке и возникающие токи отражения автоматически создадут требуемое вертикальное поле. Если вертикальное поле создается системой обмоток (обмотка полоидального поля), то форма создаваемого поля определяет устойчивость плазмы по отношению к аксиально-симметричным вертикальным или радиальным смещениям. Здесь мы оценим требуемое значение и форму вертикального поля, используя лишь усредненные по объему параметры плазмы. Мы не будем рассматривать равновесие сил по *малому* радиусу плазмы, так как оно, как и форма внешних полей, описанных в § 4.5, зависит от деталей профилей тока и давления. Конечно, полное описание тороидального равновесия можно легко получить с помощью численного решения уравнения Грэда — Шафранова.

Силы, направленные по большому радиусу, возникают из-за: а) градиента давления плазмы, б) взаимодействия полоидального тока с тороидальным магнитным полем и в) взаимодействия

ным магнитным полем. Рассмотрим последовательно каждую из этих причин.

Силу, действующую по большому радиусу, за счет давления плазмы можно наглядно представить, рассматривая бесконечно тонкий сектор тора, показанный на рис. 4.8. Давление, действующее на противоположные стороны сектора, проинтегрированное по поперечному сечению, дает суммарную направленную наружу силу

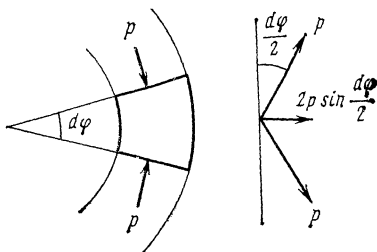


Рис. 4.8. Давление плазмы в токамаке создает силу, направленную по большому радиусу

$$dF_p = 2 \sin(d\varphi/2) \int d\mathbf{S} \cdot \hat{\varphi} p \hat{\mathbf{R}} \simeq d\varphi \int d\mathbf{S} \cdot \hat{\varphi} p \hat{\mathbf{R}}.$$

Эта сила, отнесенная ко всему тору,

$$F_p = 2\pi \int d\mathbf{S} \cdot \hat{\varphi} p(\psi). \quad (4.7.1)$$

С точки зрения движения отдельных частиц это центробежная сила, возникающая за счет тороидальной компоненты тепловых скоростей.

Вторая радиальная сила возникает из-за взаимодействия полоидального тока в плазме (если он имеется) с тороидальным магнитным полем. Так как на внутренней стороне тора тороидальное магнитное поле больше, чем на внешней [$B_\varphi = I(\psi)/R$], а любой полоидальный ток, протекающий по внешней стороне, должен протекать и по внутренней ($\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$), то из $\mathbf{J}_{\text{пол}} \times \mathbf{B}_{\text{тор}}$ выделится результирующая сила по большому радиусу. Направление этой силы зависит от направления полоидального тока, эта сила действует наружу для диамагнитной плазмы и внутрь для парамагнитной.

Эту силу можно вычислить точно так же, как была вычислена сила, связанная с давлением плазмы. Воспользуемся интегральной формой уравнений равновесия (4.1.7), в которой интегрирование проводится по поверхности того же самого бесконечно тонкого тороидального сектора. Каждое слагаемое в (4.1.7) описывает силы, действующие на поверхность. Рассмотрим эффекты, связанные только с тороидальным полем. Из поверхностного интеграла в (4.1.7) можно выделить часть, связанную с интегрированием по торцам сектора $d\mathbf{S} \cdot \hat{\varphi}$, и часть, связанную с интегрированием по участку тороидальной поверхности, которая образует боковую поверхность плазменного сектора $d\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{n}} = -\nabla\psi / |\nabla\psi|$, на

которой тороидальное поле равно вакуумному магнитному полю:

$$\mathbf{F}_{B_\varphi} = - \int d\mathbf{S} \cdot \hat{\varphi} \frac{B_\varphi^2}{2\mu} \hat{\varphi} + \int d\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \frac{B_\varphi^2}{2\mu} \hat{\mathbf{n}}. \quad (4.7.2)$$

Если бы внутри плазмы тороидальное магнитное поле было вакуумным, то результирующая сила, действующая на плазму, отсутствовала, и сила, описываемая равенством (4.7.2), была бы равна нулю (это можно доказать строго [7]). Отсюда следует, что силы, действующие на боковые поверхности сектора, возникают из-за разницы между тороидальным полем внутри плазмы и вакуумным тороидальным полем

$$\mathbf{F}_{B_\varphi} = \int d\mathbf{S} \cdot \hat{\varphi} \frac{1}{2\mu} (B_{\varphi \text{ вак}}^2 - B_\varphi^2) \hat{\varphi}. \quad (4.7.3)$$

Так же как и сила, обязанная давлению плазмы, суммарная сила, действующая на тор только из-за тороидального поля, равна

$$F_{B_\varphi} = 2\pi \int d\mathbf{S} \cdot \hat{\varphi} \frac{1}{2\mu} (B_{\varphi \text{ вак}}^2 - B_\varphi^2). \quad (4.7.4)$$

Наконец, необходимо знать выражение для силы, возникающей при взаимодействии тороидального тока с полоидальным магнитным полем. Эту силу легко представить наглядно, если плазму заменить жестким сверхпроводящим тором, по которому протекает тороидальный ток. Рассмотрим теперь магнитное поле плазменного тока. Те силовые линии, которые заполняют все пространство с наружной стороны тора, должны пройти через отверстие тора. Таким образом, полоидальное поле на внутренней стороне тора должно быть гораздо больше, чем на внешней (как показано на рис. 4.9), так что существует результирующая сила, направленная наружу. Внешнее вертикальное магнитное поле уменьшает напряженность результирующего поля на внутренней стороне тора и увеличивает на внешней, что компенсирует эту силу и уравнивает все остальные.

Простейший способ расчета силы $\mathbf{J}_{\text{тор}} \times \mathbf{B}_{\text{пол}}$ состоит в задании виртуального радиального смещения плазмы и определении изменения энергии полоидального магнитного поля за счет изменения

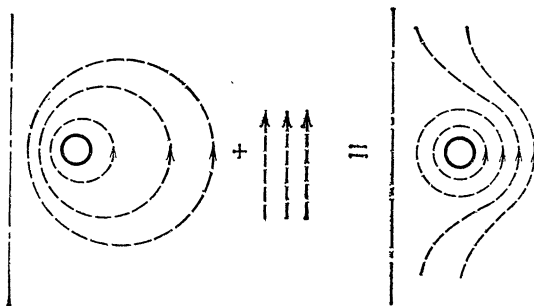


Рис. 4.9. Полоидальное магнитное поле плазменного тока дает вклад в радиальную силу, расталкивающую плазму. Внешнее вертикальное магнитное поле приводит к силе, направленной внутрь

индуктивности при фиксированном потоке полоидального поля:

$$\psi_{\text{пол}} = LI_{\text{тор}} = \text{фиксирован}; \quad (4.7.5)$$

$$F_{B_{\text{пол}}} = -\frac{d}{dR} \frac{1}{2} LI_{\text{тор}}^2 = \frac{1}{2} I_{\text{тор}}^2 \frac{dL}{dR}. \quad (4.7.6)$$

Вопрос 4.7.1. Чему была бы равна сила, действующая на плазму, если вместо полоидального магнитного потока был бы фиксированным тороидальный ток? Какую работу должен был бы совершить индуктор или обмотки полоидального поля для того, чтобы поддерживать тороидальный ток? Включен ли в (4.7.5) поток внешнего вертикального магнитного поля?

Для расчета этой силы можно воспользоваться стандартным выражением для индуктивности круглого тора в приближении большого аспектного отношения

$$L = \mu R (\ln(8R/a) - 2 + l_i/2), \quad (4.7.7)$$

где R — большой радиус, a — малый радиус и

$$l_i = \int dS \cdot \hat{\psi} B_{\text{пол}}^2 / \pi a^2 B_{\text{пол}}^2(a) \quad (4.7.8)$$

внутренняя индуктивность на единицу длины тора, т. е. энергия полоидального магнитного поля, заключенная внутри плазмы при единичном плазменном токе. Для однородного или слабо пикированного распределения тороидального тока $l_i \geq 1/2$.

Выражение (4.7.7) вывести не так просто. Обычно при выводе полоидальный ток в вакуумной области, окружающей тор, выражается в виде ряда по специальным функциям, а затем для магнитного потока на поверхности тора используется приближение большого аспектного отношения, которое подставляется в выражение (4.7.5). По-видимому, этот результат невозможно получить, используя только локальное разложение. Причина этого заключается в том, что в полный полоидальный ток дает вклад переходная область между тороидальными поверхностями вблизи шнура, где плазму можно рассматривать как прямой проводник, и областью, далекой от тора, где плазма выглядит как магнитный диполь. Такой переход происходит на расстояниях, сравнимых с большим радиусом тора, в связи с чем внешняя индуктивность приблизительно равна индуктивности прямого проводника в коаксиальном кожухе радиусом $r=R$:

$$L_{\text{внешн}} = \mu R (\ln(8R/a) - 2) \simeq \mu R \ln(R/a).$$

Для расчета индуктивности необходимо использовать специальные функции, так как трудно подобрать локальное приближение, одновременно удовлетворяющее граничным условиям $\psi_{\text{пол}}=0$ на центральной линии тора и на бесконечности. Приближение большого аспектного отношения для индуктивности, которое дается формулой (4.7.7), удивительно близко к точному результату, вычисленному Малмбергом и Розенблютом [24] и Фоком [25].

Сложим теперь эти три силы, действующие на плазму по большому радиусу, и приравняем их направленной внутрь силе от

векторного произведения вертикального внешнего поля и тороидального тока, проинтегрированного по обходу тора:

$$2\pi R B_y I_{\text{тор}} = 2\pi \int d\mathbf{S} \cdot \hat{\boldsymbol{\Phi}} \left[p + \frac{1}{2\mu} (B_{\varphi}^2 \text{вак} - B_{\varphi}^2) \right] + \frac{1}{2} I_{\text{тор}} \frac{\partial L}{\partial R}. \quad (4.7.9)$$

Эта формула используется для определения вертикального поля, необходимого для удержания плазмы на заданном радиусе. Для тора с круглым сечением требуемое вертикальное поле

$$B_y = \frac{1}{RI_{\text{тор}}} \int d\mathbf{S} \cdot \hat{\boldsymbol{\Phi}} \left[p + \frac{1}{2\mu} (B_{\varphi}^2 \text{вак} - B_{\varphi}^2) \right] + \frac{\mu I_{\text{тор}}}{4\pi R} \left[\ln \frac{8R}{a} - 1 + l_i/2 \right]. \quad (4.7.10)$$

Используя стандартное определение величины β_J , аналогичное определению $\beta_{\text{пол}}$ *,

$$\beta_J \equiv \langle p \rangle / \frac{1}{2\mu} \left(\oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B}_{\text{пол}} / \oint d\mathbf{l} \right)^2 \quad (4.7.11)$$

и вспоминая определение (4.4.11) для диамагнетизма μ_J , получаем следующее выражение для необходимого вертикального поля:

$$B_y = \frac{\mu I_{\text{тор}}}{4\pi R} \left[\ln \frac{8R}{a} - 1 + \frac{1}{2} (l_i + \beta_J + \mu_J) \right]. \quad (4.7.12)$$

Вопрос 4.7.2. Рассмотрим токамак с большим β , в котором $\beta_J \approx \mu_J \gg 1$. Начиная с какого максимального значения β_J в токамаке с круглым сечением однородное вертикальное магнитное поле будет полностью компенсировать полоидальное магнитное поле на внутренней границе тора? Какой будет соответствующий предел для

$$\langle \beta \rangle \equiv \langle p \rangle / \frac{1}{2\mu} B_{\varphi 0}^2? \quad (4.7.13)$$

Что случится, если мы попытаемся сделать β_J еще больше?

Вопрос 4.7.3 [27]. Предположим, что идеально проводящий тор нагревают так, что β растет, а $q(\psi)$ остается неизменным. Может ли теперь вертикальное поле компенсировать полоидальное поле, если величина q поддерживается постоянной на границе плазмы? Может ли β расти до бесконечности при этих условиях? Что представляет собой в этом случае полоидальное поле?

Вопрос 4.7.4. В Советском Союзе токамак ТО-1 работал с вертикальным полем, включенным только в одной четверти тора, без существенных изменений в поведении плазмы. Как в этом случае решается вопрос с силами? Как велико должно быть это вертикальное поле по сравнению с полем, приложенным ко всему обходу тора при тех же самых условиях работы?

Раз уже мы коснулись необходимого для равновесия вертикального поля, то можно поставить вопрос, какое пространственное распределение должно иметь это поле для того, чтобы избежать простых аксиально-симметричных неустойчивостей. Если бы вертикальное поле было однородным, то равновесие было бы ней-

* Инвариантным определением β_J является $\beta_J = \frac{8\pi \mu \int p dS}{I_{\text{тор}}^2}$, где интеграл

берется по поперечному сечению шнура. — *Примеч. ред.*

трально устойчивым — плазму можно было бы сдвинуть вверх или вниз без образования возвращающей силы.

Если силовые линии вертикального поля выгнуты наружу от оси симметрии тора, как показано на рис. 4.10, то плазма устойчива по отношению к жестким вертикальным смещениям. Для того чтобы убедиться в этом, сместим плазму вверх или вниз и увидим, что взаимодействие тороидального плазменного тока с небольшой компонентой вертикального поля, направленной к оси тора, создает вертикальную возвращающую силу. Если вертикальное поле вогнуто в сторону оси тора, то плазма неустойчива по отношению к таким вертикальным смещениям. Кривизну внешнего вакуумного магнитного поля удобнее всего описывать с помощью *коэффициента спада* поля, который определяется как

$$n \equiv - \frac{R}{B_{\text{верт}}} \frac{d}{dR} B_{\text{верт}}. \quad (4.7.14)$$

Условие устойчивости по вертикали — это

$$0 < n. \quad (4.7.15)$$

Для обеспечения устойчивости в горизонтальном направлении нужно, чтобы возвращающая сила со стороны вертикального поля спадала по радиусу медленнее, чем силы, расширяющие плазму:

$$\frac{d}{dR} (2\pi R I B_y) > \frac{d}{dR} \left\{ \frac{1}{2} \mu I^2 \left[\ln \frac{8R}{a} - 1 + \frac{1}{2} (l_i + \beta_J + \mu_J) \right] \right\}.$$

Как и ранее, при дифференцировании полоидальный поток должен оставаться неизменным, но теперь необходимо учесть поток вертикального поля

$$\psi = LI - 2\pi \int_0^R dR R B_y. \quad (4.7.16)$$

В пределе большого аспектного отношения $\ln(8R/a) \gg 1$ условие, необходимое для устойчивости по горизонтали, следующее:

$$n < 3/2. \quad (4.7.17)$$

Вопрос 4.7.5. Отметим, что при выводе условия устойчивости по горизонтали (4.7.17) мы не требовали сохранения тороидального потока или энтропии при виртуальных смещениях. Каким был бы результат, если бы эти условия учитывались?

Вопрос 4.7.6 [32]. Плазму в тороидальном токамаке можно рассматривать как магнитный диполь, ориентированный против вертикального магнитного поля. Перевернувшись, диполь может перейти в состояние с меньшей энергией. Почему

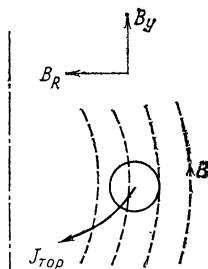


Рис. 4.10. Форма силовых линий вертикального магнитного поля, необходимая для аксиально-симметричной устойчивости

же плазма в токамаке не стремится опрокинуться в результате момента сил, действующих на нее со стороны вертикального магнитного поля?

Мне приятно выразить благодарность Ли Берри и А. Т. Менсу за помощь в подготовке этого параграфа.

§ 4.8. РЕЗЮМЕ

Основные уравнения равновесия — это уравнения (4.1.1) — (4.1.3). Однако для расчетов равновесия в аксиально-симметричных тороидальных конфигурациях почти всегда используется уравнение Грэда — Шафранова (4.4.10) или его аналоги в случае прямого цилиндра и конфигураций с винтовой симметрией, которые приведены в табл. 4.1. В этих уравнениях давление и полный полоидальный ток должны быть заданы в виде зависимости от функции потока ψ , пропорциональной полоидальному потоку, а не от пространственных координат.

Если необходимо деформировать плазму, имеющую форму прямого кругового цилиндра, то нужно использовать внешнее магнитное поле. Внешние токи, необходимые для вытягивания сечения плазмы с помощью квадрупольного магнитного поля, определяются формулой (4.5.11). Квадрупольные токи могут быть расположены достаточно далеко, но при этом мы получим лишь небольшую вытянутость. Любую вытянутость можно получить, сжимая плазму стенками, по которым протекает ток навстречу току в плазме, но эти стенки должны быть расположены очень близко к плазме, а профиль тока в плазме достаточно широк.

Вертикальное поле, необходимое для удержания тороидальной плазмы по большому радиусу, дается формулой (4.7.10). Вывод выражения для этого вертикального поля в § 4.7 показывает, как используются интегральные свойства равновесия.

§ 4.9. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Для изучения математических основ теории МГД-равновесия можно использовать работы:

1. Kruskal M. D., Kulsrud R. M. — Phys. Fluid., 1958, v. 1, p. 265—274.
- В работе
2. Kruskal M. D. Plasma Physics (Seminar at Trieste), IAEA, Vienna, 1965 было сделано дополнение.
3. Grad H., Rubin H. IAEA Geneva Conf., 1958, v. 31, p. 190—197.
- По-видимому, по теории МГД-равновесия больше всех работ опубликовано В. Д. Шафрановым. Им написаны три обзорных статьи:
4. Шафранов В. Д. — В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 2. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1963, с. 92.
5. Соловьев Л. С., Шафранов В. Д. — Там же. Вып. 5, 1967, с. 3—208.
6. Mukhovatov V. S., Shafranov V. D. — Nucl. Fusion, 1971, v. 11, p. 605—633.

Некоторые из его более поздних работ:

7. Shafranov V. D. — Plasma Phys., 1971, v. 13, p. 757—762.
8. Захаров Л. Е., Шафранов В. Д. — Журн. техн. физ., 1973, т. 43, вып. 2, с. 225—234.
9. Shafranov V. D. — Proc. IAEA Workshop on Fusion Reactor Design Problems (Culham, 1974), IAEA Vienna, 1974, p. 249—259.

Вывод уравнения Грэда — Шафранова можно найти также в книге:

10. Thompson W. B. An Introduction to Plasma Physics. Oxford, Pergamon Press, 1962.

Хороший обзор по численным методам решения уравнения Грэда — Шафранова содержится в статье:

11. Hockney R. W. Methods of Computational Physics. v. 9. N. Y., Academic Press, 1970, p. 135—211.

То, что равновесие, рассмотренное в § 4.5, имеет бесконечное число точек бифуркации, было обнаружено недавно в работе:

12. Pabaloizou J. C. B. e. a. — Nucl. Fusion, 1977, v. 17, p. 33—46.

То же самое равновесие было исследовано авторами:

13. Strauss H. R. — Phys. Fluids, 1974, v. 17, p. 1040—1041.

14. Gajewski R. — Ibid., 1972, v. 15, p. 70—74.

Ниже следуют работы, цитируемые в § 4.6:

15. Becker G. — Nucl. Fusion, 1974, v. 14, p. 319—321.

16. Von Hagenow K. U., Lackner K. — Proc. 3rd Intern. Symp. on Toroidal Plasma Confinement, Garching, 1973, F-7.

17. Kadish A. — Nucl. Fusion, 1973, v. 13, p. 756—757.

18. Kadish A., Stevens D. C. — Ibid., 1974, v. 14, p. 821—829.

19. Feneberg W., Lackner K. — Ibid., 1973, v. 13, p. 549—556.

Использованный в § 4.7 упрощенный вывод выражения для вертикального поля, необходимого для тороидального равновесия, заимствован из:

20. Mills R. G. Princeton Plasma Phys. Lab. report MAT-800, Nov. 1970.

21. Mense A. T. Univ. of Wisconsin, Nucl. Engr. Dept. report FDM-71, Sept. 1973.

Более строгий анализ можно найти в цитированных выше обзорных статьях, а также в работах:

22. Green J. M., Johnson J. L., Weimer K. E. — Phys. Fluids, 1971, v. 14, p. 671—683.

23. Yoshikawa S. — Ibid., 1964, v. 7, p. 278—283.

Индуктивность круглого тора вычислена в работах:

24. Malmberg J. H., Rosenbluth M. N. — Rev. Sci. Instrum., 1965, v. 36, p. 1886—1887.

25. Fock V. A. — Phys. Z. Sowjet., 1932, Bd 1, S. 215.

Некоторые более поздние работы по токамакам с высоким значением $\beta_{пол}$:

26. Callen J. D., Dory R. A. — Phys. Fluids, 1972, v. 15, p. 1523—1528.

27. Clarke J. F., Sigmar D. J. — Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 70—74.

28. Dory R. A., Peng Y.-K. M. — Nucl. Fusion, 1977, v. 17, p. 21—31.

Ниже приводятся некоторые другие работы, цитируемые в тексте:

29. Bateman G. — Nucl. Fusion, 1973, v. 13, p. 581—594.

30. Соловьев Л. С. — В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 6. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1972, с. 210—290.

31. Morse P., Feshbach H. — Methods of Theoretical Physics. N. Y., McGraw-Hill, 1953 (имеется перевод: Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. Изд-во иностр. лит., М., 1960, с. 232).

32. Bartoli C., Green T. S. — Nucl. Fusion, 1963, v. 3, p. 84—88.

Глава 5. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП

Для того чтобы определить, является ли данное равновесие устойчивым или неустойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям, в большей части работ по МГД-неустойчивостям используются линеаризованные МГД-уравнения. При этом подавляющее большинство авторов исследуют этот вопрос, используя вариационную форму этих уравнений, называемую *энергетическим принципом*. Вариационный метод очень мощный и часто су-

щественно упрощает анализ, но его применение требует понимания некоторых тонкостей. В настоящей главе основной акцент сделан на интерпретацию и вывод различных форм энергетического принципа, но затрагиваются и альтернативные математические методы, используемые в линейной теории устойчивости.

Было бы полезно напомнить и уточнить наши определения равновесия и устойчивости. МГД-равновесие — это полный баланс сил в каждой точке пространства. *Неустойчивость* — это стремление уйти из положения равновесия при сколь угодно малых возмущениях скорости. *Устойчивость* — это стремление вернуться к первоначальному равновесию. Строго говоря, для исследования неустойчивости необходимо, чтобы возмущения развивались из равновесного состояния. Поэтому в качестве исходного обычно выступает возмущение скорости, а не возмущение давления или магнитного поля. Например, для шарика, движущегося по дну чашки, это правило исключает возмущения, при которых шарик вращается, не проходя через положение равновесия.

Несколько труднее дать определение понятию *нейтральной устойчивости*; грубо говоря, это граница между устойчивостью и неустойчивостью. Затруднения возникают в том случае, когда равновесие вырождено. Например, допустим, что шарик движется по круглому желобу на дне чашки. Является ли это состояние устойчивым или только нейтрально устойчивым? Различие становится еще менее очевидным в непрерывной жидкости, у которой имеется бесконечное число степеней свободы — три на каждую точку в жидкости.

Вопрос 5.1. Разберитесь в следующих тонкостях в определении устойчивости:

1) Допустим, что плазма получила возмущение скорости, которое никак не меняет ее форму, поля, давление и силы в плазме. Скорость остается неизменной. Является ли такая плазма нейтрально устойчивой?

2) Предположим, что возмущенная плазма стремится вернуться к первоначальному равновесию, но возвращающие силы так велики, что плазма проскакивает положение равновесия и каждый раз получает все большие возмущения (сверхустойчивость). Устойчива ли такая плазма?

3) Допустим, что возмущенная плазма стремится вернуться к первоначальному положению, но вязкие или диссипативные силы останавливают ее в новом равновесном состоянии. Неустойчива ли такая плазма?

4) Допустим, что в плазме образовались стационарные конвективные ячейки. Устойчиво ли такое новое состояние плазмы?

5) Предположим, что источник энергии создает хаотическое, турбулентное состояние, которое стационарно только в среднем. Является ли это турбулентное состояние неустойчивым?

§ 5.1. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Мы будем основываться на системе уравнений идеальной МГД-модели (2.1.1) — (2.1.6) с граничными условиями (2.5.5) и (2.5.7), которые сохраняют массу; поток магнитного поля и энергию системы. Эти уравнения линеаризуются по бесконечно малым возмущениям стационарного равновесия, определяемого уравнениями (4.1.1) — (4.1.3) и условиями $v^0(x) = 0$, $\rho^0 = \rho^0(x)$. Все рав-

новесные величины будут обозначаться индексом 0, а все возмущенные — индексом 1. Линеаризованные МГД-уравнения выглядят следующим образом:

$$\rho^0 \frac{\partial \mathbf{v}^1}{\partial t} = -\nabla p^1 + \mathbf{J}^0 \times \mathbf{B}^1 + \mathbf{J}^1 \times \mathbf{B}^0, \quad (5.1.1)$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B};$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}^1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v}^1 \times \mathbf{B}^0); \quad (5.1.2)$$

$$\frac{\partial p^1}{\partial t} = -\mathbf{v}^1 \cdot \nabla p^0 - \Gamma p^0 \nabla \cdot \mathbf{v}^1, \quad \Gamma = 5/3. \quad (5.1.3)$$

Уравнение для возмущения плотности

$$\frac{\partial \rho^1}{\partial t} = -\mathbf{v}^1 \cdot \nabla \rho^0 - \rho^0 \nabla \cdot \mathbf{v}^1 \quad (5.1.4)$$

не потребуется, так как возмущение плотности не входит ни в одно из остальных уравнений. Неустойчивости в движущейся среде ($\mathbf{v}^0 \neq 0$) здесь рассматриваться не будут.

Отметим, что амплитуда каждой из семи возмущенных переменных ($\mathbf{v}^1, \mathbf{B}^1, p^1$) несущественна, так как линеаризация может быть выполнена с помощью малого масштабного множителя ε , на который умножается каждая возмущенная величина

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{B} \\ p \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{B}^0 \\ p^0 \\ \rho^0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \mathbf{v}^1 \\ \mathbf{B}^1 \\ p^1 \\ \rho^1 \end{pmatrix}. \quad (5.1.5)$$

Основная причина линеаризации МГД-уравнений заключается в том, что при этом любое возмущение можно представить в виде суммы собственных функций, которые для заданного равновесия и граничных условий определяются однозначно вне зависимости от выбора начального возмущения. Начальные условия определяют лишь тот вклад, который дает каждая собственная функция в это возмущение. Так как в случае стационарного равновесия коэффициенты в уравнениях для возмущений (5.1.1)—(5.1.4) не зависят от времени, то все собственные функции имеют простую экспоненциальную зависимость от времени (за исключением вырожденных собственных функций, которые могут иметь степенную зависимость от времени).

§ 5.2. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ξ

Полезно записать линеаризованные уравнения в терминах вектора смещений

$$\xi(\mathbf{x}, t) \equiv \int_0^t dt' \mathbf{v}^1(\mathbf{x}, t'). \quad (5.2.1)$$

Если использовать лагранжевы координаты, движущиеся вместе с жидкостью, то вектор ξ представлял бы собой смещение жидкого элемента от своего начального положения. Однако здесь мы используем эйлеровы координаты, которые неподвижны в инерциальной системе отсчета, и поэтому изменение величины ξ характеризует поток различных жидких элементов, последовательно проходящих через данную точку. Вывод энергетического принципа при фиксированной границе проще в эйлеровых координатах, тогда как при свободной границе, по-видимому, лучше применить лагранжевы координаты. Векторную функцию ξ можно задать в любой системе координат; различие в интерпретации для бесконечно малых возмущений несущественно.

Линеаризованные уравнения (5.1.2) и (5.1.3) для возмущения магнитного поля и давления можно проинтегрировать по времени

$$\mathbf{V}^1(\mathbf{x}, t) = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}^0) + \mathbf{V}^1(\mathbf{x}, 0); \quad (5.2.2)$$

$$p^1(\mathbf{x}, t) = -\xi \cdot \nabla p^0 - \Gamma p^0 \nabla \cdot \xi + p^1(\mathbf{x}, 0). \quad (5.2.3)$$

Константы интегрирования в (5.2.2) и (5.2.3) можно опустить, если возмущения представляют собой динамический процесс, развившийся из равновесного состояния. Это предположение всегда используется в литературе. В динамике оно соответствует движению шарика с некоторой начальной скоростью от вершины холма, а не по траектории, которая проходит мимо вершины. Для линеаризованных МГД-уравнений это предположение соответствует следующим начальным условиям:

$$\left. \begin{aligned} \xi(\mathbf{x}, 0) &= 0; & \frac{\partial}{\partial t} \xi(\mathbf{x}, 0) &\neq 0; \\ \mathbf{V}^1(\mathbf{x}, 0) &= 0; & p^1(\mathbf{x}, 0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.4)$$

Теперь возмущения магнитного поля и давления определяются равенствами:

$$\mathbf{V}^1(\mathbf{x}, t) = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}^0); \quad (5.2.5)$$

$$p^1(\mathbf{x}, t) = -\xi \cdot \nabla p^0 - \Gamma p^0 \nabla \cdot \xi. \quad (5.2.6)$$

Линеаризованные уравнения можно объединить в одно уравнение второго порядка в частных производных для вектора смещения

$$\begin{aligned} \rho^0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F\{\xi\} &= \nabla \cdot (\xi \cdot \nabla p^0 + \Gamma p^0 \nabla \cdot \xi) + \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{B}^0) \times [\nabla \times (\xi \times \mathbf{B}^0)] + \\ &+ \frac{1}{\mu} (\nabla \times [\nabla \times (\xi \times \mathbf{B}^0)]) \times \mathbf{B}^0. \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Нашу систему можно считать изолированной, если на граничной равновесной магнитной поверхности плазмы справедливо граничное условие

$$\xi_{\perp} = 0, \quad (5.2.8)$$

либо если вакуумная область окружена идеально проводящим кожухом. Линейный анализ устойчивости, как правило, основывается на уравнении (5.2.7).

Вопрос 5.2.1. Исходная система линейных МГД-уравнений (5.1.1)–(5.1.3) — это система уравнений седьмого порядка для переменных v^i , \mathbf{B}^i и p^i . Уравнение (5.2.7) для ξ представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных шестого порядка. Куда исчез седьмой порядок?

§ 5.3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП

Энергетический принцип можно вывести почти так же, как были получены вариационные формы в главе, посвященной неустойчивости Рэлея — Тейлора. Умножим уравнение движения (5.2.7) на производную по времени от вектора смещения $\dot{\xi}$ и проинтегрируем по объему плазмы с учетом граничных условий (5.2.8):

$$\int d^3x \rho^0 \dot{\xi} \ddot{\xi} = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x \frac{1}{2} \rho \dot{\xi}^2 = \int d^3x \dot{\xi} \mathbf{F} \{ \xi \}. \quad (5.3.1)$$

Говорят, что система уравнений *самосопряженная*, если, интегрируя по частям, можно показать справедливость равенства

$$\int d^3x \eta \cdot \mathbf{F} \{ \xi \} = \int d^3x \xi \cdot \mathbf{F} (\eta) \quad (5.3.2)$$

для любых η и ξ , которые удовлетворяют граничным условиям. Интегрирование по частям оказывается достаточно громоздким, подробно оно было выполнено в работах Б. Б. Кадомцева [3], Кулсруда [4] и др. При условии самосопряженности из (5.3.1) следует, что полная энергия возмущений не меняется во времени:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int d^3x \frac{1}{2} \rho^0 \dot{\xi}^2 - \frac{1}{2} \int d^3x \xi \cdot \mathbf{F} \{ \xi \} \right] = 0. \quad (5.3.3)$$

кинетическая + потенциальная энергия

В литературе для потенциальной энергии принято обозначение

$$\delta W \equiv - \frac{1}{2} \int d^3x \xi \cdot \mathbf{F} \{ \xi \}. \quad (5.3.4)$$

Из условия постоянства энергии возмущений следует, что любое возмущение, которое дает уменьшение потенциальной энергии (δW отрицательно), приводит к возрастанию кинетической энергии, что свидетельствует о неустойчивости системы в линейном приближении. Это означает, что начальное возмущение скорости нарастает. Совсем не обязательно, чтобы такое возмущение обладало бы самой большой скоростью нарастания или было бы собственной функцией уравнений, или тем состоянием, к которому,

вероятно, придет система в процессе эволюции. Подойдет любая пробная функция, лишь бы она удовлетворяла граничным условиям и была бы интегрируема. Это является одним из преимуществ использования (5.3.4) для исследования устойчивости.

И напротив, если любое возмущение приводит к увеличению потенциальной энергии (δW положительно), то система линейно устойчива по отношению к экспоненциально нарастающим модам. Строгое доказательство этого утверждения содержится в работах [5, 6].

Используя принцип наименьшего действия, из энергетического принципа можно вывести линейные уравнения движения (5.2.7):

$$\delta \int dt L \equiv \delta \int dt [\text{к. э.} - \delta W(\xi, \dot{\xi})], \quad (5.3.5)$$

где вариация $\delta \xi(\mathbf{x}, t)$ произвольна, за исключением концов интервала интегрирования по времени. Таким образом, уравнения движения — это уравнение Эйлера — Лагранжа для энергетического принципа.

Вопрос 5.3.1. Можете ли Вы получить закон сохранения энергии (5.3.3), соответствующий линеаризованным уравнениям, из закона сохранения энергии для нелинейных МГД-уравнений

$$E = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{p}{\Gamma - 1} + \frac{1}{2\mu} B^2 \right), \quad (5.3.6)$$

который, для используемых здесь граничных условий является интегральным представлением (2.5.4)? Как быть с возмущениями второго порядка для давления и магнитного поля?

Поскольку линеаризованные уравнения движения (5.2.7) имеют постоянные по времени коэффициенты, их можно записать в виде уравнений для задачи на собственные значения, так же как это было сделано в гл. 3:

$$\xi(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \{ \xi(\mathbf{x}) \exp(\gamma t) \}, \quad (5.3.7)$$

$$\gamma^2 \rho^0 \xi(\mathbf{x}) = \mathbf{F} \{ \xi(\mathbf{x}) \}, \quad (5.3.8)$$

в которых собственные значения γ и собственные функции $\xi(\mathbf{x})$ могут быть комплексными. (В литературе вместо γ часто используется $i\omega$.) Из условия самосопряженности действительного оператора \mathbf{F} непосредственно следует, что γ^2 должна быть действительной величиной:

$$\begin{aligned} (\gamma^2)^* \rho^0 \xi^* &= \mathbf{F} \{ \xi^* \}; \\ \gamma^2 \int d^3x \rho^0 \xi^* \cdot \xi &= \int d^3x \xi^* \mathbf{F} \{ \xi \} = \\ &= \int d^3x \xi \cdot \mathbf{F} \{ \xi^* \} = (\gamma^2)^* \int d^3x \rho^0 \xi \cdot \xi^*. \end{aligned}$$

Откуда $\gamma^2 = (\gamma^2)^*$.

Это означает, что γ либо действительная величина, что соответствует экспоненциальному нарастанию или затуханию, либо чисто мнимая, что соответствует колебаниям. В идеальной МГД-модели

нет собственных функций, которые соответствуют нарастающим или затухающим колебаниям. Однако можно подобрать такое сочетание собственных функций, которое на конечном интервале времени будет давать нарастающие или затухающие колебания, точно так же, как можно подобрать собственные функции кинетического уравнения Власова (волны Кейза — Ван Кампена) для того, чтобы продемонстрировать затухание Ландау.

Вопрос 5.3.2. Собственные функции, соответствующие неустойчивости в линейном приближении, имеют вид $(v^1, \mathbf{B}^1, p^1)(x, t) = (v^1, \mathbf{B}^1, p^1)(x) \exp(\gamma t)$. Каким образом с помощью таких собственных функций можно описать движение, которое проходило через равновесие $(v^1 \neq 0, \mathbf{B}^1 = 0, p^1 = 0)$ при $t = 0$?

Вопрос 5.3.3. Покажите, что для произвольного равновесия, движение со скоростью $v^1 = \alpha(p^0) \mathbf{B}^0 + \beta(p) \mathbf{J}^0$ не меняет ни магнитного поля, ни давления и, следовательно, не создает никаких дополнительных сил. Означает ли это, что любое равновесие по крайней мере нейтрально устойчиво? Описывает ли это возмущение такое движение, которое проходило через равновесие?

§ 5.4. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ПРИНЦИПА

Существует много различных способов преобразования выражения для потенциальной энергии $\delta W(\xi, \xi)$: это интегрирование по частям, разбиение различных членов на части, добавление членов, интеграл от которых для заданных граничных условий равен нулю и т. д. Например, очень важной является симметричная форма записи энергетического принципа, в которой ξ содержится только внутри множителей, представляющих собой полный квадрат. Вывод такой симметричной формы указывает на самосопряженную природу оператора сил (5.2.7).

Рассматривая различные формы записи энергетического принципа, можно увидеть, какие эффекты приводят к развитию неустойчивостей (отрицательные члены в δW), а какие стремятся стабилизировать неустойчивость (положительные члены в δW). Здесь мы рассмотрим несколько различных способов записи энергетического принципа.

Из (5.2.7) и (5.3.4) следует основное выражение для потенциальной энергии в плазме

$$\begin{aligned} \delta W &= -\frac{1}{2} \int d^3 x \xi \cdot \mathbf{F} \{ \xi \} = \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3 x \{ \nabla \cdot [\xi \cdot \Delta p^0 + \Gamma p^0 \nabla \cdot \xi] + \mathbf{J}^0 \times \mathbf{B}^1 + \mathbf{J}^1 \times \mathbf{B}^0 \} \cdot \xi. \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

где $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$; $\mathbf{B}^1 = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}^0)$ и $\Gamma = 5/3$.

Члены с p^1 и $\mathbf{J}^1 \times \mathbf{B}^0$ можно проинтегрировать по частям по объему плазмы. Это дает

$$\begin{aligned} \delta W_F &= \frac{1}{2} \int d^3 x \left\{ \frac{1}{\mu} |\mathbf{B}^1|^2 + \mathbf{J}^0 \cdot \xi \times \mathbf{B}^1 + \Gamma p^0 |\nabla \cdot \xi|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \xi \cdot \nabla p^0 \nabla \cdot \xi \right\} \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

плюс поверхностный член

$$\delta W - \delta W_F = \frac{1}{2} \int dS \cdot \xi (p' + \mathbf{B}^0 \cdot \mathbf{B}^1). \quad (5.4.3)$$

Если плазма доходит до жесткой стенки, где $d\mathbf{S} \cdot \hat{\xi} = 0$, то поверхностный член обращается в нуль. Если же плазма окружена вакуумной областью, то поверхностный член внутри вакуумной области можно проинтегрировать по частям для того, чтобы получить развернутую форму записи энергетического принципа:

$$\delta W = \delta W_F + \delta W_{\text{вак}} + \delta W_S, \quad (5.4.4)$$

где δW_F — потенциальная энергия возмущений жидкости, которая определяется формулой (5.4.2);

$$\delta W_{\text{вак}} = \frac{1}{2} \int_{\text{вак}} d^3x \frac{1}{\mu} |\mathbf{B}^1|^2 \quad (5.4.5)$$

возмущение энергии магнитного поля в вакуумной области, и

$$\delta W_S = \frac{1}{2} \int d\mathbf{S} \left[\left[\nabla \left[p^0 + \frac{1}{2\mu} (\mathbf{B}^0)^2 \right] \right] \right] (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\xi})^2 \quad (5.4.6)$$

поверхностный интеграл, который не равен нулю только для равновесия с поверхностным током. $[[\mathbf{A}]]$ означает скачок величины \mathbf{A} на поверхности плазмы. Такое обобщение энергетического принципа с учетом вакуумной области было сделано Бернштейном, Фриманом, Крускалом и Кулсрудом [1]. Более подробный вывод приведен в книге Шмидта [7].

Дальнейшее преобразование и интегрирование по частям выражения (5.4.2) для потенциальной энергии возмущений в плазме дает симметричную форму, впервые полученную в [1]:

$$\begin{aligned} \delta W_F = \frac{1}{2} \int_{\text{пл}} d^3x \left\{ \frac{1}{\mu} |\mathbf{B}^1 + \mu \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\xi} \cdot \mathbf{J}^0 \times \hat{\mathbf{n}}|^2 + \right. \\ \left. + \Gamma p^0 |\nabla \cdot \hat{\xi}|^2 - 2\mathbf{J}^0 \times \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}^0 \cdot \nabla \hat{\mathbf{n}}) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\xi})^2 \right\}, \quad (5.4.7) \end{aligned}$$

где $\hat{\mathbf{n}} = -\nabla p^0 / |\nabla p^0|$ — единичный вектор нормали к равновесной магнитной поверхности. Б. Б. Кадомцев [3] и Кулсруд [4] привели подробный вывод этого выражения. В (5.4.7) отрицательным и, следовательно, дестабилизирующим может быть лишь третий член. Лили [8] записал этот член в виде суммы нормальной кривизны k и кручения $\tau = -\hat{\mathbf{B}} \cdot \nabla (\hat{\mathbf{B}} \times k/k)$ силовой линии равновесного магнитного поля:

$$\mathbf{J}^0 \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \mathbf{B}^0 = |\nabla p^0| (k + \tau \cot \theta), \quad (5.4.8)$$

где θ — угол между \mathbf{J}^0 и \mathbf{B}^0 .

По-видимому, наиболее наглядной является следующая форма записи интеграла для потенциальной энергии:

$$\delta W_F = \frac{1}{2} \int_{\text{пл}} d^3x \left\{ \frac{1}{\mu} |\mathbf{B}_\perp^1|^2 + \mu \left| \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_\parallel^1 - \mathbf{B}^0 \hat{\xi} \cdot \nabla p^0 / |\mathbf{B}^0|^2 \right|^2 + \right.$$

альфвеновские

быстрые магнитозвуковые

где $K\{\xi, \xi\} \equiv \int_{\text{пл}} d^3 x \rho^0 \xi^2$, если использовать для каждого из

компонентов ξ пробные функции со свободными параметрами. Эту процедуру можно рассматривать как нахождение минимума δW при использовании условия нормировки $K\{\xi, \xi\} = 1$ для того, чтобы исключить тривиальные решения для ξ . При такой интерпретации γ^2 представляет собой неопределенный множитель Лагранжа для нахождения условного экстремума. Такой прямой вариационный метод был применен Кернером и Тассо [18] при исследовании неустойчивостей в аналитической модели равновесия В. Д. Шафранова, см. вопрос (4.4.3). Кроме того, этот подход лежит в основе численных схем, использующих метод конечных элементов для определения полного спектра собственных значений в МГД-модели для любого аксиально-симметричного равновесия [14].

4. Если мы намерены ограничиться меньшим количеством информации, то для достижения наших целей или для упрощения задачи мы можем сменить нашу тактику. Например, если мы хотим исследовать только устойчивость без каких-либо оценок инкремента или частоты колебаний, то нам достаточно минимизировать одну потенциальную энергию δW , не обращая внимания на вклад кинетической энергии. Таким образом, условие нормировки $K\{\xi, \xi\} = 1$ можно заменить любым другим условием. При этом мы теряем возможность получить реальную оценку инкремента или вычислить структуру собственных функций.

Часто используется метод оценки верхнего и нижнего предела γ^2 , основанный на выборочном отбрасывании заведомо положительных или отрицательных членов из выражения для $\delta W\{\xi, \xi\}$. Таким образом, можно получить необходимые или достаточные условия устойчивости [16, 17].

5. В процессе анализа часто бывает полезным выполнить частичную минимизацию потенциальной энергии. Полная минимизация δW эквивалентна нахождению решений уравнений Эйлера для трех компонентов ξ . Для многих задач, рассмотренных в литературе, часто оказывается, что два из уравнений Эйлера достаточно просты и допускают точное решение. Это происходит, например, когда используются специальные условия нормировки, либо в том случае, когда равновесие обладает достаточной симметрией для того, чтобы можно было эффективно использовать фурье-анализ. Прекрасный пример такой частичной минимизации будет рассмотрен в § 7.2 при выводе критерия Мерсье.

Вопрос 5.5.1. Предположим, что равновесие нейтрально устойчиво, а в собственной функции возмущения берется только часть, связанная с полем скоростей. Как будет вести себя возмущение давления и магнитного поля во времени?

Мне хотелось бы выразить благодарность Дэвиду Нельсону за многочисленные плодотворные обсуждения в процессе подготовки этой главы.

§ 5.6. РЕЗЮМЕ

Линеаризованные уравнения для малых возмущений стационарного равновесия записывают, как правило, в терминах вектора смещений жидкости, который определен с помощью (5.2.1). Обычно полагают, что жидкость имеет начальное возмущение скорости, а начальные возмущения смещения, магнитного поля и давления равны нулю (5.2.4). В этом случае линеаризованные уравнения движения для смещения даются формулой (5.2.7), а возмущения магнитного поля и давления описываются с помощью (5.2.5) и (5.2.6).

δW означает потенциальную энергию, связанную с малыми возмущениями (5.3.4). Если для какого-либо возмущения ξ значение δW отрицательно, значит, существует экспоненциально нарастающая неустойчивость. Если для каждого нетривиального возмущения δW положительно, то плазма устойчива в МГД-приближении. Все невырожденные собственные функции либо экспоненциально нарастают, либо осциллируют во времени с постоянной амплитудой (величина γ^2 действительная).

Выражение для δW можно распространить на вакуумную область (5.4.2)—(5.4.6). Приведены две наиболее полезные формы записи плазменной части δW_F (5.4.7) и (5.4.9).

§ 5.7. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bernstein I. B. e. a. — Proc. Roy. Soc., 1958, v. A244, p. 17—40.

По-видимому, это наиболее часто цитируемая работа по МГД-устойчивости. Авторы выводят энергетический принцип и приводят примеры его использования как для идеальной МГД-модели, так и для модели с двумя адиабатами ($p_{\parallel} \neq p_{\perp}$). Для вывода используется лагранжева система координат.

2. Von Hain K., Lüst R., Schlüter A. — Z. Naturforsch., 1957, Bd 12A, S. 833—841.

Эта работа не относится к числу наиболее читаемых частично из-за того, что она никогда не переводилась с немецкого, а частично из-за использования авторами тензорных обозначений. Вывод энергетического принципа в этой работе принципиально проще потому, что авторы использовали эйлеровы (неподвижные) координаты (так же как было сделано в этой главе), и еще потому, что они использовали скорость в качестве зависимой переменной вместо того, чтобы переходить к смещению ξ . В работе получено выражение для δW в криволинейных координатах и найдена верхняя граница для инкремента в МГД-модели.

Кроме того, в тексте использовались ссылки на следующие работы:

3. Кадомцев Б. Б. — В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 2. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Госатомиздат, 1963, с. 132.

4. Kulsrud R. M. — In: Advanced Plasma Theory, Intern. School of Physics Course, 25, Varenna, 1962, M. N. Rosenbluth, ed. N. Y., Academic Press, 1964.

5. Spies G. O. — Phys. Fluids, 1974, v. 17, p. 2019—2024.

6. Laval G., Mercier C., Pellat R. — Nucl. Fusion, 1965, v. 5, p. 156—158.

7. Schmidt G. Physics of High Temperature Plasmas. N. Y., Academic Press, 1966.

8. Liley B. S. — Plasma Phys., 1962, v. 4, p. 325—328.

9. Furth H. P. e. a. Culham IAEA Conf., 1965, v. 1, p. 103—126.

10. Greene J. M., Johnson J. L. — Plasma Phys., 1968, v. 10, p. 729—745.

11. Bateman G., Schneider W., Grossman W. — Nucl. Fusion, 1974, v. 14, p. 669—683.

12. Sykes A., Wesson J. A. — Ibid., 1974, v. 14, p. 645—648.

13. Grossman W., Ortolani E. — Max-Planck — Inst. für Plasmaphysik report IPP 1/132, 1973.

14. Grimm R. C., Greene J. M., Johnson J. L. — In: Methods in Computational Physics, J. Killeen, ed. 16, N. Y., Academic Press, 1976, p. 253—280.
 15. Berger D. e. a. Berchtesgaden IAEA Conf., 1976, v. 2, p. 411—421.
 16. Соловьев Л. С. — В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 6. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1972, с. 210.
 17. Lortz D. — Nucl. Fusion, 1973, v. 13, p. 817—819.
 18. Kerner W., Tasso H. — In: Tokyo IAEA Conf., 1975, v. 1, p. 475.

Глава 6. НЕУСТОЙЧИВОСТИ В КРУГЛОМ ПЛАЗМЕННОМ ЦИЛИНДРЕ

В круглом цилиндре существует два основных механизма раскачки МГД-неустойчивостей. Градиент давления и кривизна силовых линий магнитного поля приводят к развитию так называемой перестановочной неустойчивости, которая очень похожа на изученную в гл. 3 неустойчивость Рэля—Тейлора. *Перестановочная неустойчивость*, в результате которой различные части плазмы пытаются поменяться друг с другом местами, обычно ведет к некоторому умеренному уровню колебаний, локализованных внутри плазмы. Неустойчивость второго типа, которая раскачивается током, параллельным магнитному полю, обычно называется *винтовой неустойчивостью*. Яркий пример подобной неустойчивости — это неустойчивость плазмы с свободной границей, окруженной вакуумной областью, которая может вызывать сильные искривления плазменного шнура, что приводит, как видно из эксперимента, к выносу плазмы на стенку. Конечно, реальные МГД-неустойчивости раскачиваются за счет совместного действия тока, градиента давления, кривизны и т. д. Перестановочная и винтовая неустойчивости — это не вполне четкие категории, представляющие собой интуитивное обобщение рассмотрения предельных случаев.

Прямой круговой цилиндр — очень удобная модель для начала изучения неустойчивостей удерживаемой плазмы: это промежуточное звено между геометрией плоского слоя плазмы и тороидальной геометрией. Такую цилиндрическую плазму, которую в лабораторных условиях получают с помощью ударных методов нагрева, из-за винтовой формы магнитного поля обычно называют *скрю-пинчем*. Иначе ее еще называют *Z-пинчем* в том случае, когда основная часть тока течет вдоль плазмы, и Θ -пинчем, когда большая часть тока протекает в полоидальном направлении.

§ 6.1. РАВНОВЕСИЕ

В прямом круговом цилиндре все равновесные величины зависят только от радиуса, т. е. расстояния от магнитной оси, проходящей вдоль оси цилиндра. Используя цилиндрические координаты (r, θ, z) , уравнение равновесия сил можно записать в виде

$$\frac{\partial p}{\partial r} = J_{\theta} B_z - J_z B_{\theta}, \quad (6.1.1)$$

где

$$J_z = -\frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_\theta \quad (6.1.2)$$

и

$$J_\theta = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} B_z. \quad (6.1.3)$$

Объединяя эти уравнения, получаем

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(p + \frac{1}{2\mu} B_z^2 \right) + \frac{1}{\mu r} B_\theta \frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) = 0. \quad (6.1.4)$$

Равновесие можно рассчитать и другим способом, с помощью функции потока ψ , которая определяется из

$$\mu J_z = -\nabla^2 \psi = \mu p'(\psi) + B_z B_z'(\psi), \quad (6.1.5)$$

где

$$B_\theta = -\partial \psi / \partial r. \quad (6.1.6)$$

Обычно удобнее всего задавать профили $J_z(r)$ и $B_z(r)$ и затем, интегрируя (6.1.2) и (6.1.4), находить сначала $B_\theta(r)$, а потом и $p(r)$.

При заданной длине кругового цилиндра для q можно записать точное выражение

$$q(r) = \frac{kr B_z(r)}{B_\theta(r)}, \quad k \equiv 2\pi/L. \quad (6.1.7)$$

Значение, которое принимает q на данном радиусе, зависит лишь от полного продольного тока, протекающего внутри этого радиуса, и не зависит от того, как этот ток распределен. Значение q приближенно дается формулой

$$q(r) = 5 k [\text{см}^{-1}] r^2 [\text{см}] B_z(r) [\text{кГс}] / I_z(r) [\text{кА}], \quad (6.1.8)$$

где $I_z(r)$ — полный продольный ток, протекающий внутри радиуса r . Устремляя r к нулю, получим, что q в центре плазменного цилиндра зависит только от плотности тока и B_z :

$$q(r=0) = k B_z(r=0) \Big/ \frac{\mu}{2} J_z(r=0). \quad (6.1.9)$$

Если плотность тока пикирована в центре, то q минимально при $r=0$ и монотонно увеличивается с ростом радиуса. Если J_z и B_z однородны, то величина q тоже однородна внутри плазмы (шир равен нулю). При отсутствии обратных токов максимальный шир имеет вакуумная область.

Вопрос 6.1.1. Как мы увидим ниже, резкая радиальная зависимость q (большой шир) наиболее сильно влияет на МГД-неустойчивости. Какой профиль q соответствует равновесию с $J_z = J_0(1-r^2/a^2)^\nu$, $\nu > 0$, $B_z = 1$? В частности, чему равно отношение q на границе к значению q в центре? В качестве примера профилей, измеренных на эксперименте, можно привести

$$J_z = J_0 (1 - r^2/a^2)^4 \text{ и } \rho = \rho_0 (1 - r^2/a^2)^{1,7}.$$

Вопрос 6.1.2. Допустим, что поток полоидального магнитного поля и само поле на границе плазмы в течение некоторого времени остаются неизменными. Означает ли это, что профиль тока должен оставаться постоянным?

§ 6.2. ФИЗИЧЕСКАЯ КАРТИНА ТОКОВЫХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ

Для того чтобы почувствовать физическую сущность тех явлений, которые нам предстоит изучать, в этом параграфе будут рассмотрены некоторые из токовых неустойчивостей плазменного цилиндра со свободной границей. Эти неустойчивости мы будем классифицировать в соответствии с их азимутальным номером моды $\text{exp}(im\theta)$.

«Перетяжки» $m=0$. Рассмотрим плазму без продольного поля B_z ; имеется только полоидальное поле B_θ , которое создается продольным током с плотностью J_z внутри плазмы. Предположим, что под действием азимутально-симметричного радиального возмущения часть плазменного шнура сужается, а соседние части расширяются так, как это показано на рис. 6.1. Так как через узкую область протекает тот же полный плазменный ток, то поле B_θ на поверхности плазмы возрастает, и поэтому возросшее магнитное давление продолжает в этом месте сжимать плазменный цилиндр. Однако это не приводит к одновременному нарастанию давления плазмы, так как плазма может вытекать в соседние расширившиеся части шнура. При наличии продольного магнитного поля B_z неустойчивость с $m=0$ стабилизируется, поскольку при таких возмущениях происходит сжатие продольного поля.

Вопрос 6.2.1 [11]. Существуют ли такие профили параметров, при которых неустойчивость перетяжек стабилизирована даже при отсутствии продольного магнитного поля B_z ? Для возмущений вида $\xi = \xi(r) + \xi_z \hat{z}$ оцените потенциальную энергию с помощью формулы (5.4.1). Затем приведите подынтегральное выражение в δW к квадратичной форме по $\nabla \cdot \xi$ и ξ_r . Из полученного выражения найдите условия равновесия, необходимые для $\delta W > 0$.

Винтовая мода $m=1$. Хотя слабое продольное магнитное поле и стабилизирует перетяжки, оно приводит к появлению новой неустойчивости, при которой возмущения плазменного шнура похожи на штопор. Мы покажем это на двух простых моделях.

В первой модели заменим плазменный шнур тонким проводом с током I , помещенным в продольное магнитное поле B_z . Пусть провод испытывает винтовое возмущение, как показано на рис. 6.2. В равновесном положении сила $\mathbf{I} \times B_z \hat{z}$ отсутствует, но при наличии возмущения эта сила действует наружу и возбуждает неустой-

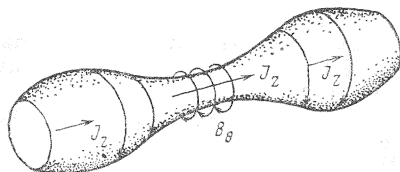


Рис. 6.1. «Сосисочная» неустойчивость («перетяжки»)

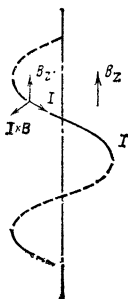


Рис. 6.2. Винтовая неустойчивость с $m=1$ тонкой плазмы или провода

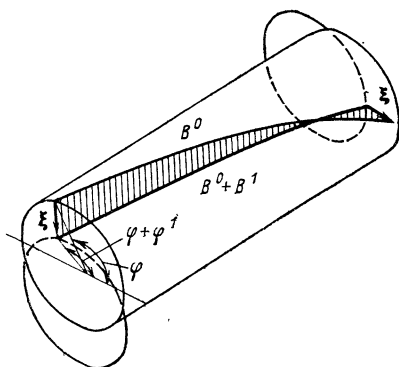


Рис. 6.3. Винтовая неустойчивость с $m=1$ в толстом плазменном шнуре; иллюстрация критерия Крускала—Шафранова. Заимствовано из работы [12]

чивость. В этом случае неустойчивость раскачивается в результате взаимодействия возмущенного тока с равновесным магнитным полем.

Вопрос 6.2.2. Чему равен инкремент такой винтовой неустойчивости с $m=1$ для тонкого провода?

Во второй модели мы рассмотрим толстый плазменный шнур, получивший винтовое возмущение, которое не искажает форму сечения шнура. Рассмотрим два поперечных сечения, отстоящих друг от друга на четверть длины волны. Если между этими сечениями невозмущенная силовая линия магнитного поля поворачивается вокруг магнитной оси на угол $\varphi > 90^\circ$, то на той стороне шнура, на которой смещение направлено внутрь, силовая линия возмущенного поля повернется вокруг первоначальной магнитной оси на больший угол $\varphi^0 + \varphi^1 > \varphi^0$, как показано на рис. 6.3. Чтобы обеспечить поворот силовой линии на этот больший угол, полоидальная компонента поля должна увеличиться за счет возмущений. Дополнительное магнитное давление с этой стороны шнура будет усиливать смещение плазмы. Следует отметить, что для равновесия условие $\varphi^0 > 90^\circ$ соответствует условию $\chi > 1$ для вращательного преобразования или условию $q < 1$ для величины q на границе плазмы.

Повторяя те же рассуждения для равновесия с $\varphi^0 < 90^\circ$ (или $q > 1$), мы увидим, что возмущения уменьшают угол φ и, следовательно, уменьшают полоидальное магнитное поле и магнитное давление $\mathbf{J}_z^0 \times \mathbf{B}_{\text{пол}}^1$ с той стороны плазменного шнура, которая смещена внутрь. Это препятствует нарастанию возмущений.

На этом простом примере видно, что винтовая мода $m=1$ неустойчива при $q_{\text{гр}} < 1$ и устойчива при $q_{\text{гр}} > 1$. Критерий устойчивости $q_{\text{гр}} > 1$ называется критерием устойчивости Крускала—Шаф-

ранова. По-видимому, это самый важный критерий устойчивости для токамаков и пинчей. Он является главным аргументом для использования в токамаке сильного продольного магнитного поля. При заданном максимальном тороидальном поле критерий Кру-скала—Шафранова устанавливает верхнюю границу на величину тороидального тока, который можно пропускать по плазменному шнуру. В следующих главах критерий устойчивости $q > 1$ будет много раз появляться в различных формах.

Эта физическая картина развития винтовой неустойчивости с $m=1$ была заимствована из работы [12].

Вопрос 6.2.3. Рассмотрим плазменный шнур с однородным током, используя декартову систему координат ($B_x = -J_{z0}y/2$, $B_y = J_{z0}x/2$, $B_z = B_{z0}$). Для заданного возмущения с $m=1$:

$$\mathbf{v}^1 = (iv_y, v_y, v_z(x - iy)/a) \exp(\gamma t + im\theta - ikz)$$

и

$$\mathbf{B} = (b_x, -ib_x, b_z(y + ix)/a) \exp(\gamma t + im\theta - ikz)$$

из первоначальных линеаризованных МГД-уравнений (5.1.1) и (5.1.2), пренебрегая полностью давлением в первом приближении по аспектному отношению ($ka \ll 1$), можно получить условие разрешимости относительно констант v_y , b_x , v_z , b_z . Из какого уравнения следует критерий Крускала—Шафранова $\frac{1}{2} J_{z0} < k B_z$? Какое слагаемое в уравнении движения приводит к развитию неустойчивости?

Винтовые моды $m \geq 2$. Предположим, что мы развернули поверхность плазмы в прямоугольник, показанный на рис. 6.4. Для того чтобы увидеть последовательность событий, приводящих к неустойчивости, этот рисунок нужно рассматривать начиная снизу. Радиальная часть возмущений, которая имеет синусоидальную зависимость $\sin(m\theta)$, смещает плазму внутрь или наружу от первоначальной поверхности. Если невозмущенная плотность тока имеет резкий скачок на границе плазмы, то возмущения, в соответствии с соотношением $\delta \mathbf{J} \approx \xi \cdot \nabla \mathbf{J}^0$, поднимают часть тока над поверхностью плазмы. Это приводит к появлению радиальной составляющей возмущенного магнитного поля B_r^1 , которая меняет свое направление при движении вдоль θ и которая, в свою очередь, вызывает электрическое поле, параллельное горбам возмущений:

$$-\oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}^1 = \frac{\partial}{\partial t} \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}_r^1. \quad (6.2.1)$$

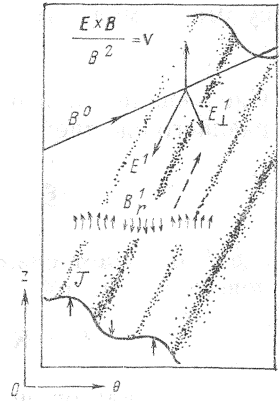
Плазма накоротко замыкает ту компоненту возмущенного электрического поля, которая параллельна равновесному магнитному полю. Остаток возмущенного электрического поля вызывает $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -дрейф плазмы внутрь или наружу от поверхности. Если невозмущенное магнитное поле навивается на цилиндр круче, чем горбы возмущений, как показано на рис. 6.4, $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -дрейф усили-

Рис. 6.4. Последовательность этапов для иллюстрации неустойчивости с $m \geq 2$. Из работы [13]

вает возмущения. В противном случае он препятствует развитию возмущений. Кроме того, если угол между силовой линией поля и горбом возмущения слишком велик, неустойчивость стабилизируется, поскольку при этом требуется слишком сильное изгибание силовых линий — так же как и в неустойчивости Рэля — Тейлора в присутствии шира.

Критичным здесь оказывается угол между силовой линией магнитного поля и горбами возмущений. Эта модель предсказывает неустойчивость, если на границе плазмы $m q < n$, и устойчивость, если $m q > n$, где m и n — пологидальный и продольный номера моды. Если магнитные силовые линии не имеют форму простой спирали, как это бывает в более сложной геометрии, то можно ожидать, что возмущения будут деформированы и раскачиваются преимущественно там, где они образуют оптимальный угол с магнитным полем.

Эта модель была предложена в работе Лоудера и Томасена [13].



Вопрос 6.2.4. Можете ли Вы вывести $\delta J \approx \xi \cdot \nabla J^0$? Какие еще члены дают вклад в δJ ? Останется ли винтовая неустойчивость, если $J^0(r)$ и $\partial J^0(r)/\partial r$ одновременно плавно стремятся к нулю на границе плазмы?

Вопрос 6.2.5. Допустим, что где-то существует рациональная магнитная поверхность $q = m/n$, на которой магнитные силовые линии параллельны горбам возмущений. Имеет ли значение для неустойчивости, где находится рациональная поверхность: в вакуумной области или же внутри проводящей жидкости?

§ 6.3. ОДНОМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Коэффициенты линеаризованных МГД-уравнений для кругового цилиндра не зависят от времени, а также не зависят и от координат θ и z . Следовательно, отдельные фурье-гармоники в этих координатах независимы и можно рассматривать лишь одну фурье-гармонику по времени. Возмущения можно записать в виде

$$\xi(r, t) = \xi(r) \exp[\gamma t + i(m\theta - kz)].$$

Поскольку коэффициенты в разложении Фурье являются функциями только радиуса, задача становится одномерной. С помощью алгебраических преобразований из МГД-уравнений можно исключить все возмущенные величины, кроме двух. Процедура алгебраических преобразований основана на двух ключевых моментах. На первом этапе вводится полное возмущенное давление p^* как

сумма термодинамического и магнитного давлений:

$$p^* = p^1 + \mathbf{B}^0 \cdot \mathbf{B}^1 / \mu. \quad (6.3.2)$$

Следующий важный шаг заключается в выводе слагаемого, описывающего сжатие:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{\xi} = \frac{-\rho \gamma^2 (p^* - (2/\mu r) B_0^2 \xi_r)}{(\rho \gamma^2 + F^2/\mu) \Gamma p^0 + \rho \gamma^2 (B_0^2 + B_z^2)/\mu}, \quad (6.3.3)$$

где F означает скалярное произведение волнового вектора и равновесного магнитного поля

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{K} \cdot \mathbf{B} \equiv \frac{m}{r} B_0 - k B_z = \frac{B_0}{r} (m - nq). \quad (6.3.4)$$

После алгебраических выкладок получаем, что величины $r \xi_r$ и p^* удовлетворяют следующей паре обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(\rho \gamma^2 + F^2/\mu) r \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) = C_{11} r \xi_r + C_{12} p^*; \quad (6.3.5)$$

$$(\rho \gamma^2 + F^2/\mu) r \frac{\partial}{\partial r} p^* = C_{21} r \xi_r - C_{11} p^*. \quad (6.3.6)$$

Здесь:

$$C_{11} = 2(mFB_0/r - B_0^2 \Lambda)/\mu;$$

$$C_{12} = r^2 \Lambda - m^2 - k^2 r^2;$$

$$C_{21} = -(\rho \gamma^2 + F^2/\mu)^2 +$$

$$+ 2(\rho \gamma^2 + F^2/\mu) B_0 \frac{d}{dr} \left(\frac{B_0}{r} \right) / \mu + 4(B_0/r)^2 (F^2/\mu - B_0^2 \Lambda)/\mu;$$

$$\Lambda = -\rho^2 \gamma^4 / [(\rho \gamma^2 + F^2/\mu) \Gamma p^0 + \rho \gamma^2 (B_0^2 + B_z^2)/\mu].$$

Граничные условия на оси $r=0$ можно получить, раскладывая уравнения в ряд вблизи $r=0$ и приравнивая в полученных уравнениях члены с одинаковыми степенями r , что дает

$$\xi_r \rightarrow r^{m-1} \quad (6.3.6)$$

и

$$p^* \rightarrow \frac{1}{m} \left(\frac{2}{\mu} \frac{B_0}{r} F - \rho \gamma^2 - F^2/\mu \right) r \xi_r. \quad (6.3.7)$$

Если плазма подходит вплотную к жесткой стенке, то граничные условия на ней выглядят следующим образом:

$$\xi_r(r=a) = 0. \quad (6.3.8)$$

Как и в любой линейной задаче, амплитуда решения может быть произвольной.

Все остальные возмущенные величины можно выразить через $r \xi_r$ и p^* :

$$i \xi_\theta = \left(\frac{m}{r} p^* - \frac{2B_0}{\mu r} F \xi_r + B_0 F \mathbf{V} \cdot \mathbf{\xi} / \mu \right) / (\rho \gamma^2 + F^2/\mu); \quad (6.3.9)$$

$$i\xi_z = (-kp^* + FB_z \nabla \cdot \mathbf{\xi} / \mu) / (\rho \gamma^2 + F^2 / \mu); \quad (6.3.10)$$

$$iB_r^1 = -F\xi_r; \quad (6.3.11)$$

$$B_\theta^1 = F i \xi_\theta - B_\theta \nabla \cdot \mathbf{\xi} - r \xi_r \frac{d}{dr} \left(\frac{B_\theta}{r} \right); \quad (6.3.12)$$

$$B_z^1 = F i \xi_z - B_z \nabla \cdot \mathbf{\xi} - \xi_r \frac{d}{dr} B_z. \quad (6.3.13)$$

Вопрос 6.3.1. Какой характер имеет собственная функция устойчивых колебаний с отрицательным значением γ^2 вблизи радиуса, на котором $F^2 = -\rho \gamma^2 \mu$?

Вопрос 6.3.2. Почему на рациональной магнитной поверхности, на которой $F=0$, радиальная компонента возмущенного магнитного поля (6.3.11) B_r^1 обращается в нуль? Есть ли какая-либо разница между случаями, когда эта поверхность находится в идеально проводящей плазме или в области с конечной проводимостью?

Если плазму окружает вакуумная область, то компоненты каждой из фурье-гармоник возмущенного магнитного поля к этой области имеют вид:

$$-i B_r^1 = k [C_1 I'_m(kr) + C_2 K'_m(kr)]; \quad (6.3.14)$$

$$B_\theta^1 = -\frac{m}{r} [C_1 I_m(kr) + C_2 K_m(kr)]; \quad (6.3.15)$$

$$B_z^1 = k [C_1 I_m(kr) + C_2 K_m(kr)]. \quad (6.3.16)$$

Здесь I_m и K_m — функции Бесселя мнимого аргумента.

Используя граничные условия $B_r^1 = 0$ на поверхности идеально проводящей стенки ($r_{ст}$) и условие непрерывности B_r^1 на границе между плазмой и вакуумом, можно выразить константы C_1 и C_2 через радиальную компоненту смещения ξ_a на границе плазмы:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \xi_a F(a) K'_m(kr_{ст}) / k\Delta; \\ C_2 &= -\xi_a F(a) I'_m(kr_{ст}) / k\Delta, \end{aligned} \right\} \quad (6.3.17)$$

где $\Delta \equiv I'_m(ka) K'_m(kr_{ст}) - I'_m(kr_{ст}) K'_m(ka)$.

Наконец, потребовав непрерывности p^* на границе плазма—вакуум, получим следующее соотношение:

$$\xi_a = \left(\frac{k\mu}{F^2} \right) \frac{I'_m(ka) K'_m(kr_{ст}) - K'_m(ka) I'_m(kr_{ст})}{K_m(ka) I'_m(kr_{ст}) - I_m(ka) K'_m(kr_{ст})} p^*(a). \quad (6.3.18)$$

Видно, что наличие вакуумной области не вызывает затруднений.

В общем случае можно доказать, что неустойчивые собственные значения уравнений (6.3.5) и (6.3.6) ведут себя как собственные значения задачи Штурма—Лиувилля (см., например, работу [2]). Основываясь на этом факте, для вычисления решений (6.3.5) и (6.3.6) можно использовать простую итерационную процедуру. Задав произвольным значением γ , проинтегрируем уравнения до границы плазмы. Если на границе получим слишком большое значение ξ_r , то нужно уменьшить γ и повторить вычисления; если ξ_r слишком мало, γ нужно увеличить. Эту процедуру

можно обобщить на случай заданного номера радиальной моды, при котором $\xi_r=0$ внутри плазмы; точность полученных результатов может быть проверена с помощью интегрирования в обратном направлении. Численные схемы, основанные на этом методе, который называется «пристрелкой», имеют широкое применение. Кривые для инкрементов и собственные функции, которые приведены в этой главе, были рассчитаны именно этим методом.

§ 6.4. ОДНОМЕРНЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП

В то время как уравнения на собственные функции хорошо приспособлены для численных расчетов, для аналитических исследований удобнее использовать одномерную форму потенциальной энергии. Такая форма может быть получена с помощью частичной минимизации δW по компонентам ξ , касательным к магнитной поверхности. Детали этого вывода, вместе с подробным обсуждением рецептов применения одномерного энергетического принципа, можно найти в работе Ньюкомба [3]. После такой частичной минимизации, как пояснялось в гл. 5, энергетический принцип можно использовать только для определения устойчивости равновесия, но не для нахождения собственных функций и инкрементов. Основываясь на общем выражении для плазменной части δW (5.4.2), получаем следующую одномерную форму для δW :

$$\delta W_F = \frac{\pi}{2\mu} \int_0^a dr r \left\{ \frac{r^2 B_\theta^2}{m^2 + k^2 r^2} [(nq - m) \xi_r' - (nq + m) \xi_r / r]^2 + [r^2 B_\theta^2 (nq - m)^2 - 2B_\theta (rB_\theta)'] \xi_r^2 / r^2 \right\}. \quad (6.4.1)$$

Одно из условий минимизации — это $\nabla \cdot \xi = 0$.

Если плазма окружена вакуумной областью, к (6.4.1) необходимо добавить энергию возмущений магнитного поля в вакуумной области (5.4.5). Так как возмущения магнитного поля в этой области полностью определяются формулами (6.3.14) — (6.3.18), $\delta W_{\text{вак}}$ можно выразить непосредственно через смещение на границе плазмы. В пределе длинного и тонкого цилиндра $ka \ll kr_{\text{ст}} \ll 1$ для $\delta W_{\text{вак}}$ имеем:

$$\delta W_{\text{вак}} = \frac{\pi}{2\mu} \xi_a^2 B_{\theta a}^2 \frac{(m - nq)^2}{m} \frac{1 + (a/r_{\text{ст}})^{2m}}{1 - (a/r_{\text{ст}})^{2m}}. \quad (6.4.2)$$

Это слагаемое всегда дает положительный вклад в потенциальную энергию.

Вопрос 6.4.1. Каким образом неустойчивость плазмы со свободной границей может развиваться быстрее, чем неустойчивость при закрепленной границе, если потенциальная энергия возмущений в вакуумной области всегда положительна, т. е. стабилизирующая?

Интегрируя по частям слагаемое в (6.4.1), содержащее $\xi_r \xi_r'$, получаем удобное выражение для потенциальной энергии:

$$W = W_f + W_a + W_{\text{вак}}; \quad (6.4.3)$$

$$W_f = \frac{\pi}{2} \int_0^a dr [f(\xi_r')^2 + g\xi_r'^2]; \quad (6.4.4)$$

$$f = rB_0^2(m - nq)^2/\mu(m^2 + k^2 r^2);$$

$$g = \frac{2k^2 r^2}{m^2 + k^2 r^2} \frac{dp}{dr} + \frac{B_0^2}{\mu r} \left[(m - nq)^2 \frac{m^2 - 1 + k^2 r^2}{m^2 + k^2 r^2} + \frac{2k^2 r^2((nq)^2 - m^2)}{(m^2 + k^2 r^2)^2} \right];$$

$$W_a = \frac{\pi}{2\mu} \xi_a^2 B_{0a}^2 \frac{(m - nq)^2 - 2m(m - nq)}{m^2 + k^2 r^2} \Big|_{r=a}. \quad (6.4.5)$$

Если в равновесии имеется поверхностный ток, то необходимо учесть дополнительный вклад от (5.4.6).

В пределе длинного и тонкого цилиндра $k^2 r^2 \ll 1$ (так называемый предел большого аспектного отношения) слагаемое, приводящее к неустойчивости, можно упростить:

$$g = \begin{cases} \frac{B_0^2}{\mu r m^2} \left[(m^2 - 1)(nq - m)^2 + \frac{2\mu k^2 r^2}{B_0^2} r \frac{dp}{dr} \right] & (6.4.6) \\ \text{для } m \geq 2; \\ \frac{B_0^2}{\mu r} k^2 r^2 \left[3(nq - 1)^2 + 4(nq - 1) + \frac{2\mu}{B_0^2} r \frac{dp}{dr} \right] & (6.4.7) \\ \text{для } m = 1. \end{cases}$$

Мода $m=1$ оказывается выделенной, так как для нее сокращаются все члены нулевого порядка разложения по $(kr)^2$.

§ 6.5. НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ

В случае закрепленной границы или внутренних неустойчивостей радиальная компонента возмущения на границе отсутствует, $\xi_r = 0$, и поэтому через границу нет потоков энергии и массы или потока магнитного поля. В этом случае нужно учитывать только внутреннюю часть δW_f — ни вакуумный, ни поверхностный члены не дают вклада в энергетический принцип. Как и раньше, на границе плазмы допускаются полондальные поля и магнитный поток.

Внутренняя мода $m=1$. В этом случае можно поступить следующим образом: подберем такую пробную функцию, которая локализована в области, где отрицательное слагаемое $g\xi_r'^2$ максимально по абсолютной величине, а положительное $f(\xi_r')^2$ не слишком велико. Если $p'(r)$ отрицательно (давление спадает от оси к краю плазмы), чтобы продемонстрировать неустойчивость, для ξ_r достаточно использовать ступенчатую функцию, которая положительна там, где $q(r) < 1$, и равна нулю в остальной области:

$$\xi_r(r) = \begin{cases} \xi_a & q(r) < 1; \\ 0 & q(r) > 1. \end{cases} \quad (6.5.1)$$

Такая ступенчатая функция в пределе большого аспектного отношения $k^2 r^2 \ll 1$ оказывается очень хорошим приближением для

функции, которая минимизирует δW_f . Если используется пробная функция, которая в области $(nq-1)^2 \neq 0$ имеет большую радиальную производную, то основной вклад в δW_f дает первое положительное (стабилизирующее) слагаемое в (6.4.4).

Вопрос 6.5.1. Решение уравнения Эйлера

$$(f\xi')' - g\xi = 0 \quad (6.5.2)$$

должно минимизировать выражение (6.4.4) для δW_f . Подставляя (6.5.2) в (6.4.4), при условии $\xi\xi' = 0$ при $r=0$ и $r=a$, получаем

$$\delta W_f = \int dr [f\xi'^2 + (f\xi')'\xi] = 0.$$

В то же время мы уже продемонстрировали пробную функцию (6.5.1), которая делает отрицательной величину δW_f при $q(0) < 1$. Почему же уравнение Эйлера не приводит к соответствующему минимуму для δW_f ?

Реальная картина потоков, соответствующая собственной функции при $m=1$, представляет собой пару конвективных ячеек с почти однородным потоком в центре плазмы и большим обратным потоком, локализованным вблизи от резонансной поверхности с $q(r) = 1$. На рис. 6.5 показана картина потоков, соответствующая равновесию с однородной плотностью тока, при котором собственные функции достаточно плавные. Вдоль оси цилиндра поток очень мал. Картина возмущений магнитного поля тоже представляет собой пару вихрей, смещенных по фазе на 90° по отношению к вихревым ячейкам скорости. В результате такой картины течения внутри резонансной поверхности происходит конвективный вынос плазмы из центра наружу. Нелинейное развитие такой конвекции обсуждается в гл. 9.

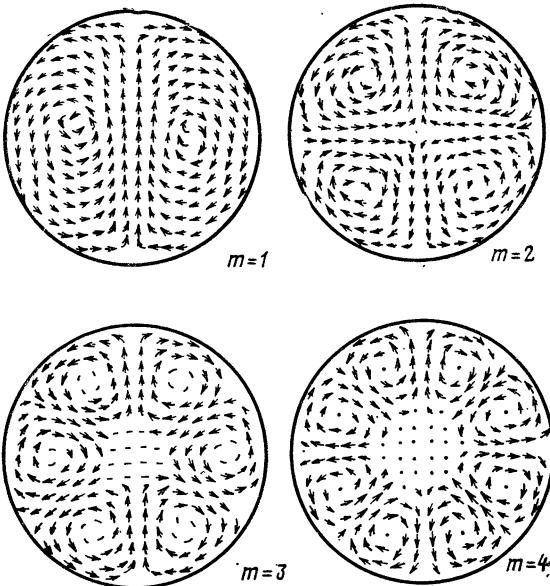


Рис. 6.5. Неустойчивости с закрепленной границей с $ka=1$ при однородном профиле тока. Из работы [17]

Простой метод оценки инкремента этой неустойчивости был предложен в работе Розенблюта, Дагазыяна, Резерфорда [14]. В этой работе считалось, что при $kr \ll 1$ и $|B_\theta| \ll |B_z|$ величинами ξ_z и $\nabla \cdot \xi$ можно пренебречь. Предполагалось также наличие большого шара, при котором ступенчатая функция является хорошим приближением.

Эти допущения ведут к следующему выражению для кинетической энергии на единицу длины цилиндра:

$$KЭ = \pi \int dr r \gamma^2 \rho^0 (\xi_r^2 + \xi_\theta^2) = \pi \int dr r \gamma^2 \rho^0 \left[\xi_r^2 + \left(\frac{d}{dr} r \xi_r \right)^2 \right]. \quad (6.5.3)$$

Минимизируя сумму кинетической и потенциальной энергии по отношению к вариации $\delta \xi_r$, фиксированной на оси и на стенке, приходим к уравнению Эйлера

$$[(2\gamma^2 r^3 \rho + f) \xi_r']' - (g - 2r^2 \gamma^2 \rho') \xi_r = 0. \quad (6.5.4)$$

Проверкой можно показать, что слагаемым $2r^2 \gamma^2 \rho'$ можно пренебречь по сравнению с g . Существует несколько способов аппроксимации решения уравнения (6.5.4). Ступенчатая функция (6.5.1) представляет собой решение (6.5.4) в первом приближении по $(kr)^2$. Используя такую ступенчатую функцию, можно один раз проинтегрировать уравнение (6.5.4) для того, чтобы получить приближенное выражение для производной ξ вдали от резонансной поверхности:

$$\xi_r' = \begin{cases} \frac{\xi_a}{f + 2\gamma^2 r^3 \rho} \int_0^r dr g & 0 < r < r_s \\ \frac{\text{const}}{f + 2\gamma^2 r^3 \rho} & r_s < r < a. \end{cases} \quad (6.5.5)$$

Наконец, приближенное решение для ξ_r в непосредственной близости от резонансной поверхности $q(r_s) = 1$

$$|r - r_s| \equiv |x| \ll 1 \quad (6.5.6)$$

можно найти, пренебрегая слагаемыми $g\xi_r$ и используя разложение

$$f \simeq r^3 (kB)^2 \simeq r_s^3 |(kB)'|^2 x^2. \quad (6.5.7)$$

Полученное уравнение можно проинтегрировать, а его решение, вдали от резонансной поверхности, сшить со ступенчатой функцией (6.5.1):

$$\begin{aligned} \xi_r &\simeq \int dx \frac{\text{const}}{2\gamma^2 \rho(r_s) + |(kB)'|^2 x^2 / \mu} \simeq \\ &\simeq \frac{1}{2} \xi_a \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \arctg [x |(kB)'|_{r_s} / \gamma \sqrt{2\rho\mu}] \right\}. \end{aligned} \quad (6.5.8)$$

Для того чтобы сшить радиальную производную этого решения

в области $r < r_s$ с выражением (6.5.5), необходимо потребовать выполнения следующего условия:

$$\gamma \simeq \frac{\pi}{\sqrt{2\rho(r_s)/\mu} |(kB)'|_{r_s} r_s^3} \int_0^{r_s} dr (-g). \quad (6.5.9)$$

Эта формула для инкремента работает достаточно хорошо в том случае, когда резонансная поверхность r_s расположена в области с большим широм и достаточно далеко от начала координат. Когда резонансная поверхность расположена вблизи начала координат ($r_s \rightarrow 0$), как показано на рис. 6.6, формула (6.5.9) становится совершенно не применимой и в этом случае необходимо пользоваться результатами численных расчетов.

Неустойчивости с $m \geq 2$. Для мод с $m \geq 2$ слагаемое g в (6.4.4), приводящее к раскату неустойчивости, отрицательно лишь в узкой области значений q :

$$|nq(r) - m| \leq \frac{\mu kr}{B_0(r)} \left[\frac{-2rp'(r)}{m^2 - 1} \right]^{1/2}. \quad (6.5.10)$$

В случае равновесия с большим широм (q быстро меняется с r) эта неустойчивость развивается только в тонком слое вблизи от резонансной поверхности. Отсюда следует, что моды с $m \geq 2$ локализованы вблизи резонансных поверхностей и имеют малый инкремент.

Численные расчеты показывают, что такие высшие моды полностью стабилизируются большим широм и большим аспектным отношением. Инкремент быстро падает с ростом номера моды и длины волны, что показано на рис. 6.6.

Неустойчивости с большим числом радиальных узлов. В прямом плазменном цилиндре каждая собственная функция характеризуется тремя волновыми числами (k, m, n). Продольное волновое число k , которое обратно пропорционально продольной длине волны ($k = 2\pi/L$), и положительный номер моды m уже рассматривались ранее. Теперь мы рассмотрим собственные функции с различными номерами радиальных мод n , где n — число узловых линий ($\xi_r = 0$), окружающих начало координат. Для любых заданных волновых чисел k

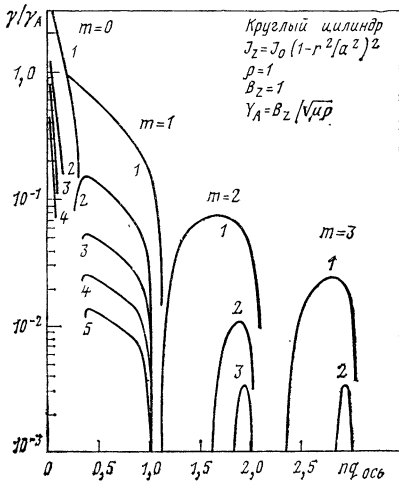


Рис. 6.6. Инкременты неустойчивостей плазмы с закрепленной границей в круглом цилиндре при умеренном шире и различных аспектных отношениях. Цифры у кривых соответствуют разным аспектным отношениям

и m существует бесконечное число радиальных мод, соответствующих устойчивым колебаниям, а также может быть конечное или бесконечное число радиальных мод, соответствующих различным неустойчивым собственным функциям.

В работе Гудблуда и Саканаки [2] доказано, что для любых заданных значений m и k неустойчивая собственная функция с большим числом узлов по радиусу имеет меньший инкремент. Собственная функция без узловых точек по радиусу ($n=0$) всегда наиболее неустойчива, если она неустойчива вообще. Эта теорема справедлива для прямого цилиндра и не верна для гофрированного цилиндра и некоторых тороидальных конфигураций с замкнутыми силовыми линиями.

Набор собственных функций с $m=1$, с последовательно возрастающим числом узлов, показан на рис. 6.7. Видно, что радиальные колебания локализованы в окрестности резонансной поверхности. Если какая-либо из мод, локализованных вблизи резонансной поверхности, оказывается неустойчивой, то неустойчивой будет и соответствующая крупномасштабная мода, не имеющая нулей внутри интервала. Локализованные неустойчивости будут стабилизированы раньше, чем мы сможем стабилизировать крупномасштабную неустойчивость. Для заданных полоидального и продольного волновых чисел любой локальный критерий устойчивости всегда является необходимым условием устойчивости также и крупномасштабных колебаний.

Критерий устойчивости для мод, локализованных вблизи резонансной поверхности, был получен Сайдемом [4]. Для того чтобы минимизировать внутреннюю часть потенциальной энергии δW_f (6.4.4), Сайдем воспользовался уравнением Эйлера (6.5.2). Для подбора решений, локализованных в непосредственной близости от резонансной поверхности $r=r_s$, коэффициенты в уравнении Эйлера раскладывались в ряд Тейлора по $x=r-r_s$. В первом приближении по этому разложению уравнение Эйлера выглядит следующим образом:

$$(x^2 \xi_r')' + D_s \xi_r = 0, \quad (6.5.11)$$

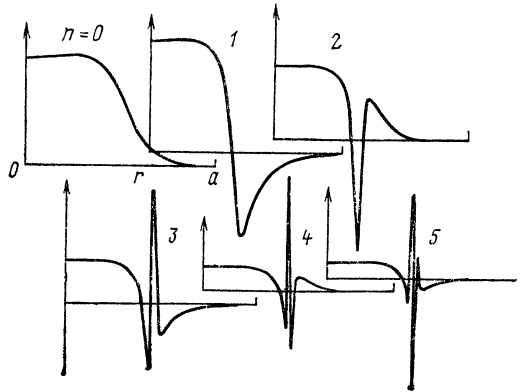


Рис. 6.7. Радиальные зависимости возмущений $\xi_r(r)$ с различным числом узлов по радиусу для неустойчивости $m=1$ в плазме с закрепленной границей. Из работы [2]

где

$$D_s \equiv -\frac{q^2}{q'^2} \frac{2\mu p'}{B_z^2 r_s} \quad (6.5.12)$$

— слагаемое, приводящее к неустойчивости. Решение этого уравнения имеет вид

$$\xi_r = x^s, \quad (6.5.13)$$

где s определяется уравнением

$$s(s+1) + D_s = 0; \quad s = \frac{1}{2} [-1 \pm (1 - 4D_s)^{1/2}]. \quad (6.5.14)$$

Так как действительная часть s отрицательна, то решение (6.5.13) имеет особенность на резонансной поверхности $x=0$. Если обрезать эти решения на произвольно малом расстоянии от резонансной поверхности, то мы получим хорошие пробные функции, почти везде близкие к тем, которые дают минимум для δW_f и которые можно снова подставлять в δW_f для исследования устойчивости. Возмущения оказываются устойчивыми ($\delta W_f > 0$) при $D_s < 1/4$ и неустойчивыми при $D_s > 1/4$. Неустойчивые собственные функции представляют собой решения, осциллирующие по радиусу, частота осцилляций и амплитуда которых бесконечно нарастают при $x \rightarrow 0$:

$$\xi_r = x^{-1/2} \cos \left[\frac{1}{2} (4D_s - 1)^{1/2} \ln x + \varphi \right] \{1 + \dots\}. \quad (6.5.15)$$

Критерий устойчивости Сайдема $D_s < 1/4$ обычно записывают в виде

$$(q'/q)^2 > -8\mu p'/rB_z^2. \quad (6.5.16)$$

Этот результат был обобщен в работе В. Д. Шафранова [1] с целью учета влияния конечного аспектного отношения. Метод, который использовался при выводе критерия Сайдема, потребует снова при выводе критерия Мерсье в произвольной тороидальной геометрии (см. § 7.2) и критерия устойчивости по отношению к резистивной желобковой неустойчивости (см. § 10.4).

Вопрос 6.5.2. Градиент давления раскачивает неустойчивость Сайдема, а шир (q'/q)² стремится стабилизировать ее. Эффективна ли стабилизация широм вблизи $r=0$? Будет ли она эффективна, если профиль давления в этом месте плоский? Если неустойчивость вызывает конвекцию, которая выравнивает профиль давления, то может ли это давать эффект самостабилизации?

Вопрос 6.5.3. В выражении для δW_f (6.4.4) ξ_r содержится только в положительно определенных слагаемых. Пробные функции для неустойчивости Сайдема быстро осциллируют по радиусу так, что $f(\xi_r')$ ² велико. Каким образом такая собственная функция может быть неустойчивой?

§ 6.6. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Когда говорят о плазме со свободной границей, обычно подразумевают резкую границу между идеально проводящей плазмой и

вакуумной областью, окружающей плазму. Фактически подразумевается скачок на профиле проводимости, так как в вакууме проводимость равна нулю. Встречающееся в литературе (см., например, [1]) четкое деление неустойчивостей на неустойчивости со свободной границей, при которых происходит деформация поверхности плазмы, и неустойчивости с закрепленной границей, которые могут приводить на поверхности плазмы только к потокам, параллельным границе, является существенным лишь в случае широких профилей плотности тока. Такое разделение совершенно естественно, например, для однородного профиля тока, при котором инкременты неустойчивостей со свободной границей гораздо выше, чем инкременты внутренних неустойчивостей, и их области устойчивости несколько различаются (см., например, [6]). Однако это различие фактически исчезает для резко пикированных профилей тока, когда высшие полоидальные моды m стабилизируются широм, а неустойчивость $m=1$ со свободной границей можно рассматривать как естественное продолжение внутренней неустойчивости $m=1$ при $q < 1$ на границе плазмы. При этом значения q внутри плазмы много меньше единицы.

В цилиндрической плазме со свободной границей рассматриваются три типа идеальных МГД-неустойчивостей.

Неустойчивость $m=1$ со свободной границей можно выделить на том основании, что она развивается вне зависимости от профиля тока, когда на границе плазмы выполнено условие $q < 1$ (в плазме с низким значением β). Это критерий устойчивости Крускала—Шафранова, который можно легко получить, заметив, что в пределе большого аспектного отношения $k^2 r^2 \ll 1$ внутренняя часть потенциальной энергии (6.4.4) пренебрежимо мала по сравнению с поверхностной (6.4.5) и вакуумной (6.4.2) частями. Из условия $\delta W_a + \delta W_{\text{вак}} < 0$ можно найти область неустойчивости

$$\frac{a^2}{r_{\text{ст}}^2} < q_a < 1, \quad (6.6.1)$$

где a — радиус плазмы; $r_{\text{ст}}$ — радиус идеально проводящей стенки и q_a — величина q на границе плазмы. Нижняя граница величины q возникает из-за стабилизирующего влияния стенки: токи отражения на стенке создают силы, которые препятствуют развитию винтовых возмущений. Инкремент неустойчивости можно оценить, полагая, что винтовое возмущение плазменного шнура можно представить как смещение каждого поперечного сечения как целого при отсутствии продольного движения. Кинетическая энергия, приходящаяся на одну длину волны λ , сводится к

$$K\mathcal{E} = \int d^3 x \rho \gamma^2 \xi^2 \simeq \langle \rho \rangle \gamma^2 \xi_a^2 \pi a^2 \lambda, \quad (6.6.2)$$

где $\langle \rho \rangle$ — средняя по объему плотность внутри плазменного шнура. Инкремент можно получить, приравнявая эту кинетическую

энергию потенциальной энергии возмущений

$$\gamma^2 = \frac{B_{\theta a}^2}{\mu \langle \rho \rangle a^2 \lambda} \left[1 - q_a - \frac{(1 - q_a)^2}{1 - a^2/r_{\text{CT}}^2} \right]. \quad (6.6.3)$$

Второй тип неустойчивостей со свободной границей, с $m \geq 2$, хорошо стабилизируется широм, подобно неустойчивостям, которые могут существовать на границе плазмы с пикированным профилем тока [16]. Для модельного равновесия это было показано аналитически В. Д. Шафрановым в работе [1] и обычно наблюдается в численных расчетах. Эта стабилизация очень чувствительна к шире.

Третий тип неустойчивостей со свободной границей называется неустойчивостью отслаивания (peeling) и существует только в том случае, когда плотность тока или одна из первых ее производных имеет разрыв на границе плазмы. Как следует из ее названия, эта неустойчивость должна приводить к отделению поверхности плазмы в виде тонкого слоя. Неустойчивость отслаивания была впервые введена в работе [15] и обсуждается в обзорной статье Вессона [16] по линейным МГД-неустойчивостям.

Вопрос 6.6.1. Предположим, что вакуумная область заменена идеально проводящей плазмой, в которой равновесный ток отсутствует. Как это повлияет на неустойчивость моды $m=1$ в плазме со свободной границей?

Вопрос 6.6.2. Может ли внутренняя неустойчивость существовать одновременно с неустойчивостью плазмы со свободной границей? Будут ли они совершенно независимы?

§ 6.7. РЕЗЮМЕ

Для определения инкрементов и пространственной структуры МГД-неустойчивостей в круглом плазменном цилиндре лучше всего использовать уравнения на собственные функции (6.3.5) и (6.3.6). Для исследования равновесия на устойчивость можно использовать также и энергетический принцип.

При заданном продольном волновом числе k неустойчивости в круглом цилиндре различаются по их азимутальному волновому числу m и радиальному номеру моды n .

Мода $m=1$ неустойчива, если где-либо внутри плазмы при отрицательном $p'(r)$ выполняется условие $q < 1 + O(ka)$. Неустойчивость проявляется в виде винтового смещения как целого той части плазмы, которая находится внутри резонансной поверхности с $q=1$.

Неустойчивости с $m \geq 2$ локализованы вблизи резонансной поверхности $nq(r) = m$ и при больших аспектных отношениях стабилизируются большим широм.

Критерий Сайдема (6.5.16) — это необходимое условие устойчивости для локализованных по радиусу мод. Эти моды должны стабилизироваться раньше, чем можно стабилизировать крупномасштабные моды.

§ 6.8. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шафранов В. Д. — Журн. техн. физ., 1970, т. 40, вып. 2, с. 241—252.
Среди работ по МГД-неустойчивостям эта статья поворотной точкой от предшествующих расчетов границ устойчивости в локальном приближении.
2. Шафранов В. Д. Основное внимание уделено исследованию характерных равновесных профилей и получил оценки инкрементов и радиальную структуру крупномасштабных неустойчивостей. Это отличный обзор.
Доступное изложение недавних результатов спектральной теории и численных расчетов неустойчивостей можно найти в работе:
3. Goedbloed J. P., Sakanaka P. H. — Phys. Fluids, 1974, v. 17, p. 908—929.
Следующие две статьи — это классические работы по анализу границ устойчивости:
4. Newcomb W. A. — Ann. Phys. (N. Y.), 1960, v. 10, p. 232—267.
5. Suydam B. R. — In: IAEA Geneva Conf., 1958; v. 31, p. 157—159.
О численных методах и их результатах см.:
6. Tayler R. J. — Proc. Phys. Soc. (London), 1957, v. B70, p. 1049—1063.
7. Takeda T. e. a. — Phys. Fluids, 1972, v. 15, p. 2193—2201.
8. Goedbloed J. P., Hagebeuk H. J. L. — Ibid., 1972, v. 15, p. 1090—1101.
9. Grossmann W., Ortolani S. Max-Planck-Inst. für Plasmaphysik, report IPP 1/132, 1973.
Сравнение теории и эксперимента приводится в работе:
10. Freidberg J. P. — Phys. Fluids, 1970, v. 13, p. 1812—1818.
Очень ясная статья об устойчивости пинчей с обращенным магнитным полем (тема, которой мы не касались в этой книге) — это:
11. Robinson D. C. — Plasma Phys., 1971, v. 13, p. 439—462.
Дополнительные работы, на которые мы ссылались в тексте:
12. Кадомцев Б. Б. — В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 2. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Госатомиздат, 1963, с. 132—176.
13. Johnson J. L. e. a. UN Geneva Conf., 1958, v. 31, p. 198—212.
14. Lowder R. S., Thomassen K. I. — Phys. Fluids, 1973, v. 16, p. 1497—1500.
15. Rosenbluth M. N., Dagazian R. Y., Rutherford P. H. — Ibid., 1973, v. 16, p. 1894—1902.
16. Frieman E. A. e. a. — Ibid., 1973, v. 16, p. 1108—1125.
17. Wesson J. A. — In: 7th European Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics; Lausanne, 2, 1975, p. 102—118.

Глава 7. НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТОРОИДАЛЬНОГО ШНУРА

В первой части этой главы рассмотрен критерий устойчивости Мерсье, который является локальным критерием устойчивости, справедливым для плазмы с произвольной тороидальной геометрией и произвольным β . Вывод критерия Мерсье по Грину и Джонсону [1] в § 7.2 дан со значительными подробностями, так как он использует математическую методику, типичную для лучших аналитических работ по МГД-неустойчивостям. При выводе использовались натуральные (потокосные) координаты, определенные в § 7.1. В § 7.3 даны некоторые применения критерия Мерсье к осесимметричным тороидальным конфигурациям.

В последнем разделе этой главы стиль изложения совершенно иной. Здесь обсуждаются численные результаты по крупномасштабным МГД-неустойчивостям в конфигурациях токамака. Основной упор сделан на влияние тороидальности на линейные не-

устойчивости равновесий с низким β . Результаты по большим β изложены в гл. 8, а нелинейные эффекты в гл. 9.

§ 7.1. НАТУРАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

Чтобы изучать литературу по устойчивости тороидальных систем, читателю полезно ознакомиться с *натуральными координатами* — криволинейными системами координат, в которых одна из координат постоянна на каждой магнитной поверхности, а две другие координаты в пределах каждой магнитной поверхности образуют сетку. Выбор натуральных координат допускает произвол, так как в качестве «радиальной» координаты может быть использована любая однозначная маркировка магнитных поверхностей, а сетка «угловых» координат может в пределах каждой поверхности деформироваться произвольным образом. Например, можно выбрать либо ортогональные координаты*, либо, в общем случае уже неортогональные, координаты, в которых как линии магнитного поля, так и линии тока — прямые (так называемые координаты Хамады). Изложение здесь начнется с общего случая, а в дальнейшем будут использоваться те координаты, которые часто встречаются в литературе.

Дадим небольшое введение в общую теорию криволинейных координат и получим некоторые соотношения, необходимые далее для работы с натуральными координатами.

Криволинейные координаты будут обозначаться $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$. Векторы

$$\mathbf{e}^i \equiv \nabla^{\theta^i}$$

называются *ковариантными* базисными векторами (не обязательно единичными), а

$$\mathbf{e}_1 \equiv \nabla^{\theta^2} \times \nabla^{\theta^3} / D$$

и соответствующие перестановки называются *контравариантными* базисными векторами, где

$$D \equiv \nabla^{\theta^1} \cdot \nabla^{\theta^2} \times \nabla^{\theta^3}$$

величина, обратная *якобиану*, которая связана с элементом дифференциального объема в декартовых координатах

$$dx dy dz = d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 / D.$$

Любой вектор может быть выражен как контравариантные компоненты a^i

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i, \quad a^i \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i$$

или ковариантные компоненты a_i , $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}^i$, $a_i \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i$. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Для преобразований между ковариантными и контравариантными компонен-

* Только при наличии осевой симметрии. — *Примеч. ред.*

тами используется метрический тензор $g_{ij} \equiv \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$, $g^{ij} \equiv \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j$; $a^i = g^{ij} a_j$, $a_i = g_{ij} a^j$.

Отметим, что

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{для } i = j \\ 0 & \text{для } i \neq j, \end{cases}$$

а

$$|g^{ij}| = |D|^2.$$

Приведем список основных тождеств:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i b_i = a_i b^i;$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^1 = (a_2 b_3 - a_3 b_2) D \text{ и перестановки индексов;}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_1 = (a^2 b^3 - a^3 b^2) / D \text{ и перестановки;}$$

$$\nabla \varphi = \partial \varphi / \partial \theta^i \mathbf{e}^i;$$

$$\mathbf{a} \cdot \nabla \varphi = a^i \partial \varphi / \partial \theta^i;$$

$$\nabla \cdot (D \mathbf{e}_i) = 0;$$

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = D \frac{\partial}{\partial \theta^i} \left(\frac{a^i}{D} \right);$$

$$\nabla \times \mathbf{e}^i = 0;$$

$$(\nabla \times \mathbf{a})^1 = \left(\frac{\partial a_3}{\partial \theta^2} - \frac{\partial a_2}{\partial \theta^3} \right) D \text{ и перестановки;}$$

$$\nabla^2 \varphi = D \frac{\partial}{\partial \theta^i} \left(\frac{g^{ij}}{D} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta^j} \right).$$

Теперь выберем *систему натуральных координат* (V, θ, ζ) , в которой V — объем, охватываемый каждой тороидальной магнитной поверхностью; θ соответствует углу вдоль малого обхода, а ζ — углу вдоль большого обхода по тору. Предполагается, что тороидальные поверхности являются вложенными, по крайней мере, локально. Координату V можно заменить любой другой поверхностной величиной, однозначно маркирующей магнитные поверхности, например полоидальным или тороидальным потоком. Координатные линии постоянных θ и ζ можно деформировать произвольно при условии их замыкания на себя при одном обходе по тору в каждом направлении. Обычно предполагается, что θ и ζ возрастают на единицу при обходе тора в соответствующих направлениях.

Так как силовые линии магнитного поля лежат на магнитных поверхностях ($\mathbf{B} \cdot \nabla V = 0$), магнитное поле можно записать в виде

$$\mathbf{B} = B^\theta \nabla \zeta \times \nabla V / D + B^\zeta \nabla V \times \nabla \theta / D, \quad (7.1.1)$$

где B^θ , B^ζ — контравариантные компоненты \mathbf{B} , а D — величина, обратная якобиану. При этом из условия

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = D \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{B^\theta}{D} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{B^\zeta}{D} \right] = 0 \quad (7.1.2)$$

следует, что магнитное поле может быть записано с помощью функции потока v

$$\frac{B^{\theta}}{D} = -\frac{\partial v}{\partial \zeta}, \quad \frac{B^{\zeta}}{D} = \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad (7.1.3)$$

где $v(V, \theta, \zeta)$ может быть многозначной функцией углов θ и ζ . Если v была бы квадратичной по θ и ζ или функцией более высоких степеней, то результирующее магнитное поле было бы неоднозначным. Поэтому v должна быть суммой членов, линейных или периодических по θ и ζ . В частности, из (7.1.1) и (7.1.3) следует, что

$$\mathbf{B} = \nabla V \times \nabla v; \quad (7.1.4)$$

$$v = \theta \dot{\psi}_{\text{тор}}(V) - \zeta \dot{\psi}_{\text{пол}}(V) + \lambda(V, \theta, \zeta), \quad (7.1.5)$$

где λ — периодическая функция θ и ζ , а $\psi_{\text{пол}}$, $\psi_{\text{тор}}$ — полоидальный и тороидальный потоки, определенные ранее в (4.2.1) и (4.2.2). Для того чтобы продемонстрировать справедливость этого для коэффициентов $\dot{\psi}$ (7.1.5), вычислим

$$\dot{\psi}_{\text{тор}} = \frac{d}{dV} \int_V^{V+dV} d^3x \mathbf{B} \cdot \nabla \zeta = \int_0^1 d\theta \int_0^1 d\zeta B^{\zeta} / D = \int_0^1 d\theta \int_0^1 d\zeta \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

Вопрос 7.1.1. Как определить периодическую функцию $\lambda(V, \theta, \zeta)$ для заданных магнитного поля и натуральной системы координат? Предположим, что поверхности и потоки зафиксированы, а λ подбирается так, чтобы минимизировать магнитную энергию. Какое условие налагает такая минимизация на плотность тока?

До сих пор углы θ и ζ были произвольными. Теперь будем деформировать координатную сетку так, чтобы исключить периодическую функцию λ :

$$\theta_{\text{нов}} = \theta_{\text{стар}} + \lambda / \dot{\psi}_{\text{тор}}(V), \quad \zeta_{\text{нов}} = \zeta_{\text{стар}}$$

или

$$\theta_{\text{нов}} = \theta_{\text{стар}}, \quad \zeta_{\text{нов}} = \zeta_{\text{стар}} - \lambda / \dot{\psi}_{\text{пол}}(V).$$

Отсюда следует, что

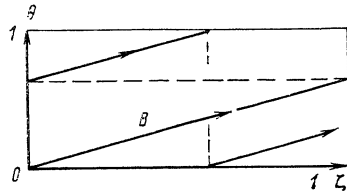
$$v = \theta \dot{\psi}_{\text{тор}}(V) - \zeta \dot{\psi}_{\text{пол}}(V), \quad (7.1.6)$$

а

$$\mathbf{B} = \dot{\psi}_{\text{тор}}(V) \nabla V \times \nabla \theta + \dot{\psi}_{\text{пол}}(V) \nabla \zeta \times \nabla V. \quad (7.1.7)$$

Если какую-либо магнитную поверхность разрезать и сделать плоской, так чтобы углы θ и ζ образовывали декартову сетку, как показано на рис. 7.1, то можно видеть, что магнитные поля всюду указывают одно и то же направление, так что силовые линии будут выглядеть прямыми. Из этой картины становится ясно, что q является не чем иным, как отношением контравариантных

Рис. 7.1. Тороидальная магнитная поверхность, развернутая в плоскость. При соответствующем выборе координат θ, ζ силовые линии выглядят прямыми



компонент **B**:

$$q = B^{\zeta} / B^{\theta} = \dot{\psi}_{\text{тор}} / \dot{\psi}_{\text{пол}} = d\psi_{\text{тор}} / d\psi_{\text{пол}}, \quad (7.1.8)$$

как и раньше в § 4.3. Более детально эти натуральные координаты, а также некоторые другие рассмотрены в работе Л. С. Соловьева и В. Д. Шафранова [7].

Для того чтобы построить координаты Хамады, которые наиболее часто встречаются в литературе, необходимо выполнить еще два условия. Во-первых, якобиан должен быть всюду нормализован на единицу

$$D = \nabla V \cdot \nabla \theta \times \nabla \zeta = 1, \quad (7.1.9)$$

так что $dx dy dz = dV d\theta d\zeta$. Доказательство того, что координатную систему при выполнении $\rho'(V) \neq 0$ можно всегда сдеформировать так, чтобы удовлетворить (7.1.9), достаточно подробно обсуждалось Грином и Джонсоном [1] и Л. С. Соловьевым и В. Д. Шафрановым [7].

Рассмотренные выше натуральные координаты можно использовать для любого магнитного поля с вложенными магнитными поверхностями. Второе условие, связанное с координатами Хамады, состоит в том, что магнитное поле должно соответствовать МГД-равновесию ($\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla p$). Тогда линии плотности тока, так же как и магнитные силовые линии, выглядят как прямые линии на плоскости θ, ζ . Чтобы показать это, воспользуемся тем, что при МГД-равновесии ток не протекает сквозь магнитные поверхности, и запишем

$$\mathbf{J} = J^{\theta} \nabla \zeta \times \nabla V + J^{\zeta} \nabla V \times \nabla \theta, \quad (7.1.10)$$

где J^{θ}, J^{ζ} пока являются некоторыми функциями V, θ, ζ . При $D=1$ магнитное поле имеет вид:

$$\mathbf{B} = B^{\theta}(V) \nabla \zeta \times \nabla V + B^{\zeta}(V) \nabla V \times \nabla \theta,$$

где $B^{\theta}(V) = \dot{\psi}_{\text{пол}}(V)$, $B^{\zeta}(V) = \dot{\psi}_{\text{тор}}(V)$. Условие равновесия

$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla p$ означает

$$J^{\theta} B^{\zeta}(V) - J^{\zeta} B^{\theta}(V) = p'(V). \quad (7.1.11)$$

Беря производные по θ и ζ от этого выражения и используя

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial J^{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial J^{\zeta}}{\partial \zeta} = 0, \quad (7.1.12)$$

можно показать, что $\mathbf{V} \cdot \nabla J^\theta = \mathbf{V} \cdot \nabla J^\zeta = 0$. Отсюда следует, что контравариантные компоненты J^θ и J^ζ являются поверхностными величинами и поэтому линии плотности тока на плоскости θ, ζ выглядят прямыми линиями. Кроме того, можно показать, что

$$J^\theta = \dot{I}_{\text{пол}}(V), \quad J^\zeta = \dot{I}_{\text{тор}}(V), \quad (7.1.13)$$

где $I_{\text{пол}}(V)$ и $I_{\text{тор}}(V)$ — полные полоидальный и тороидальный токи, связанные с каждой магнитной поверхностью и определенные выражениями (4.2.3) и (4.2.4).

Суммируя, можно сказать, что координаты Хамады являются специально приспособленными для МГД-равновесия натуральными координатами, в которых как линии \mathbf{V} , так и линии \mathbf{J} выглядят прямыми, а якобиан всюду нормирован на единицу. В общем случае координаты Хамады неортогональны и, вообще говоря, зависят как от профилей потоков [$\psi_{\text{пол}}(V)$ и $\psi_{\text{тор}}(V)$], так и от геометрии магнитных поверхностей. Впервые они были использованы Хамадой в работе, которая в английском переводе появилась в 1962 г. [8].

Вопрос 7.1.2. Как бы Вы подошли к построению явного представления координат Хамады $V(R, y, \varphi)$, $\theta(R, y, \varphi)$, $\zeta(R, y, \varphi)$ для заданного осесимметричного равновесия, определяемого $\psi_{\text{пол}} = \psi(R, y)$, $p = p(\psi)$, $R B \varphi = I(\psi)$, как в гл. 4, подобно равновесию Шафранова (4.4.15). Не забудьте о действительном выполнении интегрирования или обращения функций; допустите, что для выполнения вашего плана применимы мощные аналитические или численные методы.

§ 7.2. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ МЕРСЬЕ

Критерий устойчивости Мерсье является прямым обобщением критерия Сайдема (6.5.16) на тороидальную конфигурацию с произвольной формой, произвольным аспектным отношением и β . Это критерий устойчивости для мод, сильно локализованных около какой-либо рациональной поверхности внутри плазмы. Поэтому он является *необходимым* условием для линейной устойчивости в случае идеальной магнитной гидродинамики. Если критерий Мерсье указывает на неустойчивость, то определенно будет, по крайней мере, локализованная неустойчивость, а возможно, и крупномасштабная. Если критерий Мерсье указывает на устойчивость, то может все же остаться крупномасштабная неустойчивость. Чтобы гарантировать устойчивость всех МГД-мод, требуется *достаточное* условие устойчивости. Кроме того, критерий Мерсье, естественно, ничего не говорит о том, как преобразуются неустойчивости при более реалистических неидеальных и нелинейных условиях.

Здесь будет дан подробный вывод критерия Мерсье в тесном соответствии с работой [1]. Другой вывод можно найти у Мерсье и Люка [3], а для более глубокого физического понимания можно обратиться к работе [2]. Методика, которая используется в настоящем выводе, широко распространена в литературе по аналитической теории неустойчивостей тороидальной плазмы. Сам критерий

в настоящее время используется как некоторый тест при исследовании устойчивости равновесий, получаемых численными методами.

Мы начнем вывод с энергетического принципа (5.4.7):

$$\delta W = \frac{1}{2} \int dV d\theta d\zeta \{ |\mathbf{B}^1 + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla V) \mathbf{J} \times \nabla V / |\nabla V|^2|^2 + \Gamma p |\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}|^2 + K |\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla V|^2 \}, \quad (7.2.1)$$

$$\text{где} \quad \mathbf{B}^1 = \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}) \quad (7.2.2)$$

— возмущение магнитного поля (5.2.5), а

$$K \equiv 2\mathbf{J} \times \nabla V \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \nabla V / |\nabla V|^4 \quad (7.2.3)$$

это единственный член в δW , который может быть отрицательным и поэтому дестабилизирующим. Выразим все величины в координатах Хамады V, θ, ζ , которые были описаны в § 7.1. Особенно важны выражения для равновесных величин:

$$\mathbf{B} = B^\theta(V) \mathbf{e}_\theta + B^\zeta(V) \mathbf{e}_\zeta; \quad (7.2.4)$$

$$\mathbf{J} = J^\theta(V) \mathbf{e}_\theta + J^\zeta(V) \mathbf{e}_\zeta; \quad (7.2.5)$$

$$p'(V) = J^\theta B^\zeta - J^\zeta B^\theta. \quad (7.2.6)$$

Из трех контравариантных базисных векторов

$$\mathbf{e}_V = \nabla^\theta \times \nabla^\zeta, \quad \mathbf{e}_\theta = \nabla^\zeta \times \nabla V, \quad \mathbf{e}_\zeta = \nabla V \times \nabla^\theta \quad (7.2.7)$$

два могут быть выражены через равновесные поля

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_\theta &= (B^\zeta \mathbf{J} - J^\zeta \mathbf{B}) / p'(V); \\ \mathbf{e}_\zeta &= (-B^\theta \mathbf{J} + J^\theta \mathbf{B}) / p'(V) \end{aligned} \right\} \quad (7.2.8)$$

при условии, что \mathbf{B} и \mathbf{J} не параллельны друг другу.

Разложим вектор смещения следующим образом:

$$\boldsymbol{\xi} = \xi^V \mathbf{e}_V + \xi^\theta \mathbf{e}_\theta + \xi^\zeta \mathbf{e}_\zeta; \quad (7.2.9)$$

$$\mu \equiv B^\zeta \xi^\theta - B^\theta \xi^\zeta; \quad (7.2.10)$$

$$\eta \equiv -J^\zeta \xi^\theta + J^\theta \xi^\zeta, \quad (7.2.11)$$

причем отметим, что $\mu = (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B})_V$, $\eta = (\mathbf{J} \times \boldsymbol{\xi})_V$. Контравариантные компоненты вектора смещения равны:

$$\left. \begin{aligned} \xi^V &= \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla V; \\ \xi^\theta &= (B^\theta \eta + J^\theta \mu) / p'(V); \\ \xi^\zeta &= (B^\zeta \eta + J^\zeta \mu) / p'(V). \end{aligned} \right\} \quad (7.2.12)$$

Отсюда следует, что компоненты электрического поля равны:

$$(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B})_V = \mu; \quad (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B})_\theta = -\xi^V B^\zeta; \quad (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B})_\zeta = -\xi^V B^\theta, \quad (7.2.13)$$

а возмущенное магнитное поле, как можно показать, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^1 &= \left[B^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \xi^V + B^\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \xi^V \right] \mathbf{e}_V + \left[\frac{\partial \mu}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial V} (\xi^V B^\theta) \right] \mathbf{e}_\theta + \\ &+ \left[-\frac{\partial}{\partial V} (\xi^V B^\zeta) - \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\zeta. \end{aligned} \quad (7.2.14)$$

Наконец, дивергенция вектора смещения, соответствующая сжатию или расширению, равна

$$\nabla \cdot \xi = \frac{\partial}{\partial V} \xi^V + \frac{\partial}{\partial \theta} \xi^\theta + \frac{\partial}{\partial \zeta} \xi^\zeta. \quad (7.2.15)$$

Выберем теперь какие-либо волновые числа m и n , так чтобы в плазме была соответствующая резонансная поверхность с

$$q_0 = B_0^c / B_0^\theta = m/n. \quad (7.2.16)$$

Все равновесные величины на этой поверхности будут отмечаться индексом 0.

Основным предположением при выводе является то, что возмущение локализовано в произвольной малой окрестности $V_0 + \varepsilon > V > V_0 - \varepsilon$ резонансной поверхности. На малом масштабе, характерном для неустойчивости, можно определить новую переменную

$$x \equiv (V - V_0)/\varepsilon, \quad (7.2.17)$$

причем

$$|\xi| \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow 1. \quad (7.2.18)$$

Дальнейший вывод будет состоять в последовательном разложении потенциальной энергии по степеням ε . Разложим все равновесные величины в степенной ряд около резонансной поверхности:

$$B^\theta = B_0^\theta + \varepsilon x \dot{B}_0^\theta + \text{и т. д.}, \quad (7.2.19)$$

где B_0^θ и \dot{B}_0^θ — числовые константы, независимые от x , θ или ζ . Такая процедура позволит провести аналитическую минимизацию δW последовательно во всех порядках по ε . Все возмущенные величины также будут разложены с использованием обозначений:

$$\xi^V = \xi_0^V(x, \theta, \zeta) + \varepsilon \xi_1^V(x, \theta, \zeta) + \dots \quad (7.2.20)$$

Пользуясь тем, что $\frac{\partial}{\partial V} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x}$, а $dV d\theta d\zeta = \varepsilon dx d\theta d\zeta$, найдем, что вклад низшей степени в δW связан с членами порядка ε^{-1} в $\nabla \cdot \xi$ и B^1 :

$$(\nabla \cdot \xi)_{-1} = \frac{\partial \xi_0^V}{\partial x};$$

$$(B^1)_{-1} = - \left[B_0^\theta \frac{\partial}{\partial x} \xi_0^V e_{\theta 0} + B_0^c \frac{\partial}{\partial x} \xi_0^V e_{\zeta 0} \right],$$

в то время как член $\xi \cdot \nabla V = \xi_0^V$ имеет нулевой порядок по ε . Отсюда следует, что низший порядок δW — это ε^{-1} :

$$\delta W_{-1} = \frac{1}{2} \int dx d\theta d\zeta \{ |B_{-1}^1|^2 + \Gamma p_0 |(\nabla \cdot \xi)_{-1}|^2 \}. \quad (7.2.21)$$

Эти положительные члены в δW_{-1} можно приравнять нулю, если взять $\partial \xi_0^V / dx = 0$. Так как это условие должно быть справедливо по всей области $-1 < x < 1$, то из граничного условия (7.2.18) следует, что

$$\xi_0^V = 0. \quad (7.2.22)$$

Физически это означает, что течение, соответствующее главному порядку по ε , и его поперечный к магнитным поверхностям градиент должны быть подавлены, чтобы устранить сильное сжатие, которое резко увеличивает как термодинамическую, так и магнитную энергию.

Вопрос 7.2.1. Почему нельзя устранить сжатие с помощью громадных потоков, параллельных магнитным поверхностям, так что $\mu, \eta \sim O(\varepsilon^{-1})$?

Переходя к следующему порядку по ε , можно найти, что часть \mathbf{V}^1 и $\nabla \cdot \xi$ нулевого по ε порядка имеет вид:

$$(\mathbf{V}^1)_0 = \left[\frac{\partial \mu_0}{\partial \zeta} - B_0^0 \frac{\partial}{\partial x} \xi_1^V \right] \mathbf{e}_{\theta 0} + \left[-B_0^0 \frac{\partial}{\partial x} \xi_1^V - \frac{\partial \mu_0}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_{\zeta 0}; \quad (7.2.23)$$

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \xi)_0 &= \frac{\partial}{\partial x} \xi_1^V + \frac{\partial}{\partial \theta} \xi_0^0 + \frac{\partial}{\partial \zeta} \xi_0^0 = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \xi_1^V + (\mathbf{J}_0 \cdot \nabla \mu_0 + \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \eta_0) / p'. \end{aligned} \quad (7.2.24)$$

Это можно показать просто подстановкой, при условии, что член нулевого порядка $(\xi \cdot \nabla V)_0 = \xi_0^V$ исчезает. Комбинация этих полей образует вклад первого порядка в δW , аналогичный по форме с (7.2.21), и его можно устранить, если $B_0^{\theta 1} = B_0^{\zeta 1} = 0$ и $(\nabla \cdot \xi)_0 = 0$. Условие исчезновения этих компонент магнитного поля дает

$$\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mu_0 = 0 \quad (7.2.25)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \xi_1^V = 0.$$

Применяя последнее условие по всей области $-1 < x < 1$, получаем

$$\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \xi_1^V = 0. \quad (7.2.26)$$

Уравнения (7.2.25) и (7.2.26) означают, что основные неисчезающие порядки радиального возмущения ξ_1^V и радиального электрического поля μ_0 однородны вдоль каждой силовой линии магнитного поля \mathbf{B}_0 на резонансной поверхности. Однако на поверхности в перпендикулярном к силовой линии направлении, а также в направлении, перпендикулярном к магнитным поверхностям, они могут изменяться произвольным образом. Различные силовые линии на резонансной поверхности фактически независимы. Вследствие этого на резонансной поверхности полезно выбрать координату, которая была бы постоянна вдоль каждой сило-

вой линии

$$u \equiv m\theta - n\zeta, \quad (7.2.27)$$

так что из равенства (7.2.16) следует

$$\mathbf{B}_0 \cdot \nabla u = mB_0^\theta - nB_0^\zeta = 0. \quad (7.2.28)$$

Распространим эту координату и на все магнитные поверхности, так чтобы на них выполнялось (7.2.28), но при этом \mathbf{B}_0 все же означало магнитное поле на резонансной поверхности. При использовании этой новой координаты соотношения (7.2.25) и (7.2.26) сводятся к

$$\mu_0 = \mu_0(x, u); \quad (7.2.29)$$

$$\xi_1^V = \xi_1^V(x, u). \quad (7.2.30)$$

Полагая затем $(\nabla \cdot \xi)_0 = 0$, из (7.2.24) найдем

$$\eta_0 = \eta_0(x, u). \quad (7.2.31)$$

Опять используя (7.2.24) и

$$\mathbf{J}_0 \cdot \nabla \mu_0(x, u) = (J_0^\theta m - J_0^\zeta n) \frac{\partial \mu_0}{\partial u} = m p' / B_0^\zeta \frac{\partial \mu_0}{\partial u},$$

получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \xi_1^V + \frac{m}{B_0^\zeta} \frac{\partial \mu_0}{\partial u} = 0. \quad (7.2.32)$$

Критерий Мерсье получается из минимизации δW в следующем порядке по ε . Чтобы проделать ее, разложим возмущенное магнитное поле \mathbf{B}^1 по трем ортогональным векторам ∇V_0 , \mathbf{B}_0 , $\mathbf{B}_0 \times \nabla V_0$. Как показано Гринем и Джонсоном [1], а также Мерсье и Люком [3], можно так подобрать течение вдоль резонансной магнитной поверхности, что в этом порядке не будет сжатия

$$(\nabla \cdot \xi)_1 = 0 \quad (7.2.33)$$

и что в первом члене δW (7.2.1) исчезнет компонента, параллельная полю \mathbf{B}_0 :

$$\mathbf{B}_0 \cdot (\mathbf{B}_1^1 + \xi_1^V \mathbf{J}_0 \times \nabla V_0 / |\nabla V_0|^2) = 0, \quad (7.2.34)$$

причем это не повлияет на минимизацию по оставшимся компонентам смещения. Остается минимизировать только выражение

$$\delta W_3 = \int dx d\theta d\zeta \left\{ \left| \left(\mathbf{B}_1^1 + \xi_1^V \frac{\mathbf{J}_0 \times \nabla V_0}{|\nabla V_0|^2} \right) \frac{\mathbf{B}_0 \times \nabla V_0}{|B_0 \times \nabla V_0|} \right|^2 + K_0 (\xi_1^V)^2 \right\}, \quad (7.2.35)$$

где K_0 — выражение (7.2.3), вычисленное на резонансной поверхности.

Чтобы найти два других компонента возмущенного магнитного поля, используем (7.2.14) и (7.2.8):

$$\mathbf{B}^1 = \mathbf{B} \cdot \nabla \xi^V \mathbf{e}_V + \frac{1}{p'} [\mathbf{B} \cdot \nabla \mu + (B^\theta \dot{B}^\zeta - B^\zeta \dot{B}^\theta) \xi^V] \mathbf{J} +$$

$$+ \frac{1}{p'} \left[-\mathbf{J} \cdot \nabla \mu + J^c \frac{\partial}{\partial V} (\xi^V B^0) + J^0 \frac{\partial}{\partial V} (\xi^V B^c) \right] \mathbf{B}.$$

Вычисляя необходимые компоненты \mathbf{B}^1 до первого порядка по ε , найдем, что

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla \xi^V)_1 = \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \xi_1^V(x, u) = 0$$

и

$$\mathbf{B}_1^1 \cdot \frac{\mathbf{B}_0 \times \nabla V_0}{|\mathbf{B}_0 \times \nabla V_0|} = \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mu_1 + \mathbf{B}_1 \cdot \nabla \mu_0 + (B_0^0 \dot{B}_0^c - B_0^c \dot{B}_0^0) \xi_1^V, \quad (7.2.36)$$

где $\dot{B} = \dot{B}(x)$. Используя (7.2.29), (7.2.32) и (7.2.16), можно показать, что

$$\mathbf{B}_1 \cdot \nabla \mu_0 = x \left(\dot{B}_0^0 \frac{\partial}{\partial \theta} + \dot{B}_0^c \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \mu_0(x, u) = x S_0 \frac{\partial \xi_1^V}{\partial x},$$

где

$$S_0 \equiv B_0^0 \dot{B}_0^c - B_0^c \dot{B}_0^0. \quad (7.2.37)$$

так называемый *глобальный шир*. После всех этих выкладок вклад третьего порядка в δW сводится к

$$\delta W_3 = \int dx d\theta d\zeta \left\{ \frac{1}{N} |\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mu_1 + G|^2 + K_0 (\xi_1^V)^2 \right\}, \quad (7.2.38)$$

где

$$G \equiv S_0 \frac{\partial}{\partial x} x \xi_1^V + \xi_1^V \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{B}_0 / |\nabla V_0|^2,$$

а

$$N \equiv B_0^2 / |\nabla V_0|^2.$$

Минимизируем это выражение для δW_3 сначала по отношению к

$$\sigma \equiv \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mu_1, \quad \text{а} \quad (7.2.39)$$

а затем по отношению к ξ_1^V . Уравнение (7.2.39) называется *магнитным дифференциальным уравнением* для μ_1 при заданных σ и B_0 . Если μ_0 известно в некоторой точке на силовой линии \mathbf{B}_0 , то его величина в любой другой точке вдоль той же силовой линии равна

$$\mu_1 = \int_0^l \frac{dl}{|\mathbf{B}_0|} \sigma + \mu_1|_{l=0}, \quad (7.2.40)$$

где l — длина дуги вдоль силовой линии. Для того чтобы μ_1 было однозначной величиной на любой замкнутой силовой линии \mathbf{B}_0 , σ должна удовлетворять условию

$$\oint \frac{dl}{|\mathbf{B}_0|} \sigma = 0. \quad (7.2.41)$$

Поэтому минимизация δW_3 по отношению к σ должна выполняться с использованием (7.2.41) в качестве ограничения. Это ограничение, эквивалентное

$$\int d\theta d\zeta \delta(u - u_0) \sigma(V, \theta, \zeta) = 0,$$

можно учесть при минимизации с помощью вариационного принципа

$$\delta \left[\delta W_3 + \int dV d\theta d\zeta \lambda(V, u) \sigma(V, \theta, \zeta) \right] = 0, \quad (7.2.42)$$

где λ — лагранжев множитель, который должен быть определен в дальнейшем. Такая вариация приводит к равенству

$$\frac{2}{N} (\sigma + G) + \lambda = 0,$$

где G и N определены с помощью (7.2.38). Если использовать условие (7.2.41), то

$$\lambda = -2 \langle G \rangle / \langle N \rangle,$$

где для обозначения усредненных вдоль силовой линии величин введен символ $\langle \dots \rangle \equiv \oint \frac{dt}{|B_0|} \dots / \oint \frac{dt}{|B_0|}$. После этой минимизации δW_3 принимает вид:

$$\delta W_3 = \int dx d\theta d\zeta \left\{ \left[S_0 \cdot \frac{\partial}{\partial x} x \xi_1^V + \xi_1^V \langle \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{B}_0 / |\nabla V_0|^2 \rangle \right]^2 \frac{1}{N} + K_0 (\xi_1^V)^2 \right\}, \quad (7.2.43)$$

где $\langle \xi_1^V \rangle = \xi_1^V$, так как $\xi_1^V = \xi_1^V(x, u)$.

Теперь уже δW_3 упрощено так, что все коэффициенты являются числовыми константами, не зависящими от x . Окончательную минимизацию можно выполнить, положив

$$\xi_1^V(x, u) = \xi(x) f(u), \quad (7.2.44)$$

где $f(u)$ — произвольное изменение возмущения в пределах магнитной поверхности в направлении, перпендикулярном к магнитному полю \mathbf{B}_0 . Теперь можно построить пробную функцию $\xi(x)$, которая идентична пробной функции, использовавшейся при выводе критерия Сайдема (6.5.16). В частности, можно применить неравенство

$$\int dx \left[\frac{d}{dx} (x\xi) \right]^2 \geq \frac{1}{4} \int dx \xi^2, \quad (7.2.45)$$

в котором с помощью минимизирующей функции можно приблизиться как угодно близко к равенству (см. [1, приложение III]). При этом из (7.2.43) — (7.2.45) и вытекает критерий устойчивости Мерсье

$$\left[\frac{1}{2} S_0 + \langle \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{B}_0 / |\nabla V|^2 \rangle \right]^2 + \langle K_0 \rangle \langle B_0^2 / |\nabla V_0|^2 \rangle \geq 0, \quad (7.2.46)$$

где глобальный шир S_0 и вызывающий неустойчивость член K_0 определены выражениями (7.2.37) и (7.2.3) применительно к резонансной поверхности.

Чаще используется выражение для критерия Мерсье, выведенное Л. С. Соловьевым [4], который показал, что член $\langle K_0 \rangle$ можно представить в виде

$$\langle K_0 \rangle = - \langle J_0^2 / |\nabla V_0|^2 \rangle - \Omega_0, \quad (7.2.47)$$

где

$$\Omega_0 \equiv J_0^{\theta} \dot{B}_0^{\xi} - J_0^{\zeta} \dot{B}_0^{\theta} \quad (7.2.48)$$

известна как мера магнитной ямы. Критерий Мерсье теперь можно записать в форме

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} S^2 + S \langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} / |\nabla V|^2 \rangle - \Omega \langle B^2 / |\nabla V|^2 \rangle - \\ & - (\langle J^2 / |\nabla V|^2 \rangle \langle B^2 / |\nabla V|^2 \rangle - \langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} / |\nabla V|^2 \rangle^2) > 0. \end{aligned} \quad (7.2.49)$$

Этот необходимый критерий можно применять на любой рациональной поверхности внутри плазмы. Возвращаясь к символам, используемым в этом выражении, напомним, что

$$S \equiv B^{\theta} \dot{B}^{\zeta} - B^{\zeta} \dot{B}^{\theta} = (B^{\theta})^2 \frac{d}{dV} q(V)$$

— это величина шири магнитного поля, где $B^{\theta} = \dot{\psi}_{\text{пол}}(V)$; $B^{\zeta} = \dot{\psi}_{\text{тор}}(V)$; символ

$$\langle \dots \rangle \equiv \oint \frac{dl}{|B|} \dots / \oint \frac{dl}{|B|}$$

означает среднее вдоль силовой линии на рациональной поверхности; V — объем (или какая-либо другая метка) магнитных поверхностей; \mathbf{J} , $\dot{\mathbf{B}}$ — равновесные плотность тока и магнитное поле на рациональной поверхности, а $\Omega = J^{\theta} \dot{B}^{\zeta} - J^{\zeta} \dot{B}^{\theta}$ — характеристика магнитной ямы, где $J^{\theta} = \dot{I}_{\text{пол}}(V)$, $J^{\zeta} = \dot{I}_{\text{тор}}(V)$.

Я признателен Гюнтеру Шпизу за краткое и четкое введение в натуральные координаты, а также Джону Джонсону и Давиду Нельсону за консультации по выводу критерия Мерсье.

§ 7.3. ПРИМЕНЕНИЯ КРИТЕРИЯ МЕРСЬЕ

Формальные выражения (7.2.49) и (7.2.46), выведенные только что для критерия Мерсье, применимы для любой плазмы, удерживаемой магнитным полем при наличии вложенных магнитных поверхностей и шири. Однако когда говорят о критерии Мерсье, часто ссылаются на одно из упрощенных выражений, представляющее его приближение для конкретных равновесий. Наиболее широко используемое приближенное выражение для критерия Мерсье — это выражение, полученное В. Д. Шафрановым и

Э. И. Юрченко [11] для осесимметричных токамаков большого аспектного отношения, низкого β и круглого сечения:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{q'(r)}{q} \right)^2 + \frac{2\mu p'(r)}{r B_\varphi^2} (1 - q^2) > 0, \quad (7.3.1)$$

где r — малый радиус магнитных поверхностей, предполагаемых круглыми, а B_φ — тороидальная компонента магнитного поля, вычисленная на магнитной оси. Выражение (7.3.1) учитывает то, что внутренние поверхности смещены относительно внешних поверхностей наружу вдоль большого радиуса.

Первый член в (7.3.1) представляет стабилизирующий эффект шира — точно такой же, как в критерии Сайдема. Если давление спадает при удалении от магнитной оси, то второй член является стабилизирующим, если $q^2 > 1$, и дестабилизирующим, если $q^2 < 1$, — точно так же, как в условии Крускала—Шафранова. Эта зависимость от q^2 отличается тороидальный критерий Мерсье от критерия Сайдема для прямого цилиндра. Согласно В. Д. Шафранову и Э. И. Юрченко [11] этот стабилизирующий член с q^2 является результатом комбинации трех эффектов.

1. Усредненная тороидальная кривизна является стабилизирующей. Чтобы увидеть это, можно аппроксимировать кривизну силовой линии выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \equiv \hat{\mathbf{B}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{B}} &\approx \frac{1}{|B|} \left(\frac{B_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{B_\varphi}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \frac{B_\theta \hat{\theta} + B_\varphi \hat{\varphi}}{|B|} \approx \\ &\approx - \frac{1}{|B|^2} \left(B_\theta^2 \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} + B_\varphi^2 \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} \right), \end{aligned}$$

где θ — угол вдоль круглой магнитной поверхности радиуса r . Первый член — это полоидальная кривизна с радиусом кривизны r , а второй — тороидальная кривизна с радиусом кривизны R . Влияние кривизны на потенциальную энергию видно в последнем члене (5.4.9). Так как радиальная компонента возмущения в основном однородна вдоль силовых линий вблизи рациональной поверхности, полоидальная часть кривизны дает дестабилизирующий вклад в (5.4.9). Однако тороидальная кривизна дает стабилизирующий (отрицательный) вклад на внутренней части тора, где она максимальна, и дестабилизирующий вклад на внешней стороне, где она меньше, так что средний эффект является стабилизирующим.

2. Существует эффект магнитной ямы, так как внутренние поверхности смещены наружу вдоль большого радиуса, располагаясь в области более слабого тороидального магнитного поля. В результате радиальное возмущение стремится вытолкнуть плазму в область более сильного магнитного поля.

3. Полоидальное изменение угла наклона силовых линий дает небольшой стабилизирующий эффект. Необходимо помнить, однако, что эта концепция стабилизации магнитной ямой и кривизной

является просто интерпретацией, основанной на определенном перераспределении слагаемых. Ее нельзя использовать саму по себе для предсказаний устойчивости.

При сравнении выражения (7.3.1) с численными расчетами критерия Мерсье по точной формуле (7.2.49) было обнаружено, что приближение (7.3.1) не вполне точно при удалении от магнитной оси на расстояние, соответствующее аспектному отношению 15 или 20, в то время как токамаки в основном строятся с аспектными отношениями между 3 и 5. Однако это не очень существенно, так как при изменении равновесных параметров критерий Мерсье обычно предсказывает неустойчивость сначала на магнитной оси, а потом уже вне ее.

Вопрос 7.3.1. Случайно ли то, что критерий Мерсье, выведенный для локализованных по радиусу неустойчивостей, дает фактически условие устойчивости ($q_{оси} > 1$), совпадающее с условием устойчивости внутренней винтовой моды $m=1$?

Вопрос 7.3.2. Неустойчивость $m=2, n=1$ локализована вблизи рациональной поверхности с $q=2$, которая обычно находится в области большого шира в удалении от магнитной оси. Следует ли из критерия Мерсье, что эта мода всегда устойчива?

Вопрос 7.3.3. Показано, что критерий Мерсье явно отличается от критерия Сайдема. Как такие мелкомасштабные неустойчивости чувствуют то, что они находятся в торе, а не в прямом цилиндре — причем даже если тор имеет достаточно большое аспектное отношение?

Другое простое выражение критерия Мерсье было получено Лортцем и Нюренбергом [12]. Оно основано на разложении функции потока в ряд вблизи магнитной оси для осесимметричных конфигураций с произвольным сечением и произвольным $\beta_{пол}$. Кроме того, в той же форме представлен достаточный критерий Лортца [13], так что его легко сравнить с необходимым критерием Мерсье. По-видимому, необходимый и достаточный критерий устойчивости в идеальной МГД-модели для окрестности магнитной оси должен лежать где-то между этими двумя критериями. Комбинированный критерий имеет вид:

$$\frac{1}{q^2} < \frac{6}{1+e^2} - \frac{4}{e(e+\delta)} + Q \left[\frac{4}{e(e+\delta)} - 2 \right] + \frac{e^2-1}{e^2+1} d, \quad (7.3.2)$$

где $\delta=0$ соответствует достаточному критерию Лортца, а $\delta=1$ — необходимому критерию Мерсье. Здесь величина q имеет стандартный вид (7.1.8), $e=l_y/l_R$ — вытянутость магнитных поверхностей по вертикали в окрестности магнитной оси,

$$Q = J^0 B^z / J^z B^0 = \dot{I}_{пол} \dot{\psi}_{тор} / \dot{I}_{тор} \dot{\psi}_{пол}$$

— локальная характеристика величины $1 - \beta_{пол}$. Величина d связана со смещением и треугольностью магнитных поверхностей вблизи магнитной оси. Чтобы вычислить d , геометрию магнитных поверхностей вблизи магнитной оси необходимо представить в виде

$$V = 2\pi^2 (R_a - 2S(R - R_a) + \dots) [e(R - R_a)^2 + y^2/e + 2\Delta(R - R_a)y^2 + \dots], \quad (7.3.3)$$

где V — объем магнитных поверхностей, R_a — большой радиус магнитной оси. Параметр S , который дает смещение магнитных поверхностей относительно магнитной оси, и параметр Δ , который определяет треугольность магнитных поверхностей, выражаются через d и Q :

$$S = \frac{1}{6} d - \frac{1}{2}; \quad (7.3.4)$$

$$\Delta = \frac{1}{2e} - Q \left(e + \frac{1}{e} \right) + \frac{d}{2} \left(e + \frac{1}{3e} \right). \quad (7.3.5)$$

Вопрос 7.3.4 [12]. Какие условия наиболее благоприятны для устойчивости вблизи магнитной оси, если изменять вытянутость, треугольность и $\beta_{\text{пол}}$? При каких условиях необходимый и достаточный критерии предсказывают в основном сходные результаты? Какие наименьшие q можно достичь в устойчивой плазме?

§ 7.4. КРУПНОМАСШТАБНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТОРОИДАЛЬНЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ

В литературе имеется много статей, в которых используется аналитический подход к определению границы устойчивости в тороидальной геометрии. В пионерских работах Уэйра и Хиза [14] и Уэйра [15] для определения условий устойчивости плазмы с закрепленной границей в торе круглого сечения и с низким β применялось разложение энергетического принципа вплоть до шестого порядка по обратной величине аспектного отношения — a/R . Результаты оказались сходными с критерием Мерсье. Фриман с соавт. [16] исследовали методом Уэйра и Хиза устойчивость плазмы со свободной границей в торе круглого сечения с очень малым широм. Они нашли, что тороидальность слабо влияет на неустойчивости, даже когда стенка находится близко к плазме. Бюссак с соавт. [17] впервые аналитически показали, что внутренняя винтовая мода $m=1$, $n=1$ стабилизируется тороидальными эффектами, если $\beta_{\text{пол}}$ мало. Развита в этих работах алгебра и приближенные методы, которые использовались в вычислениях, выходят за рамки этой книги.

Вместо того чтобы более подробно представлять здесь аналитические результаты, было бы полезно сделать обзор некоторых численных результатов по скоростям роста и пространственной структуре крупномасштабных неустойчивостей в тороидальной геометрии. В этом разделе представлены результаты по идеальным МГД-неустойчивостям при сравнительно низком β для тора приблизительно круглого сечения. Высокие β и случай токамака с некруглым сечением рассмотрены в гл. 8.

Для линейного анализа по существу используются два численных метода, основанных на задаче с начальными условиями и задаче на собственные значения. В задаче с начальными условиями задается произвольное начальное возмущение и последовательно

во времени интегрируются линеаризованные уравнения, пока наиболее быстро растущая неустойчивость не будет доминировать над остальным течением. Если равновесие устойчиво, возмущение осциллирует во времени с частотой, которая обычно определяется пролетным альфвеновским временем. Расчет выполняется с помощью аппроксимации равновесия и возмущенных величин на сетке и записи МГД-уравнений в конечно-разностной форме. Для тороидальных неустойчивостей метод был разработан Вессоном и Сайксом [19] в Калэме и Шнейдером и Бейтманом [18] в Гаршинге. Как мы увидим из гл. 9 и 10, метод с начальными условиями широко используется во многих лабораториях для изучения нелинейной и неидеальной эволюции МГД-неустойчивостей.

В спектральном методе возмущение записывают в виде ряда по базисным функциям (подобным фурье-гармоникам) или по конечным элементам (которые являются функциями с подстроочными параметрами, причем каждый используется в малом элементе пространства) в предположении экспоненциальной временной зависимости. Затем МГД-уравнения преобразуют к огромным матричным уравнениям, из которых определяют собственные функции и собственные значения, т. е. инкременты и частоты колебаний. Точность, с которой этот конечный набор собственных значений аппроксимирует полный спектр МГД-уравнений, можно проверить, увеличивая число или меняя набор базисных функций. Этот метод был разработан в Принстоне [23] и в Лозанне [20]

Оба метода лучше всего работают, когда ни собственные функции, ни равновесие не имеют тонкой структуры. Это исключает возмущения типа Мерсье — Сайдема. Оба метода сталкиваются с трудностями при большом аспектном отношении для конфигураций с низким β , когда инкременты очень малы по сравнению с частотами магнитозвуковых, альвеновских и звуковых волн. При этих условиях коды с начальными условиями требуют для сходимости длительного времени, а в кодах с собственными значениями возникают проблемы точности, связанные с большим диапазоном собственных значений. По этим причинам между аналитическими и числовыми результатами имеется лишь очень маленькое перекрытие.

Вопрос 7.4.1. Вычислить можно только конечное число собственных значений и собственных функций. В то же время с волнами, резонирующими на разных магнитных поверхностях, связано бесконечное число собственных значений и собственных функций. Как вычисленные собственные значения аппроксимируют эти континуумы?

Вероятно, наиболее ясно эффект тороидальности проявляется в том, что неустойчивые собственные функции представляют собой смесь полоидальных гармоник. Поле скоростей или смещений сдвинуто наружу по большому радиусу, а на внутренней стороне тора можно найти либо неподвижные области, либо пары продольных вихрей. Особенно отчетливо это проявляется для неустойчивостей с закрепленной границей при низком аспектном отношении (рис. 7.2, б) или при высоком $\beta_{\text{пол}}$. Однако даже для

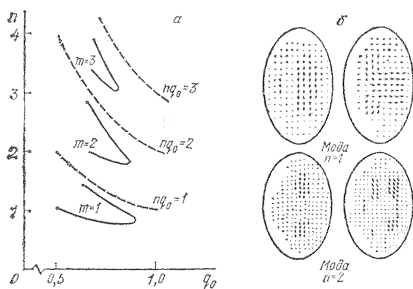


Рис. 7.2. Диаграмма неустойчивости мод с закрепленной границей (а). Показаны собственные функции (б) для токамака с $q_0 = q_{\text{ось}} = 0,81$ при умеренной вытянутости ($b/a = 1,6$) для низкого аспектного отношения ($R/a = 2,5$) и скругленного профиля тока [$p'(\psi) \sim \psi$, $II'(\psi) = 0$]. При целочисленном значении непрерывная переменная n означает торoidalное волновое число. Из работы [19]

неустойчивостей со свободной границей, когда нет стенки и вихревая структура не локализована внутри плазмы, также существует тенденция усиления неустойчивостей вблизи внешней стороны тора и появления дополнительной вихревой структуры на внутренней стороне. Очевидно, что в основном неустойчивость смещена туда, где дестабилизирующие члены, связанные с кривизной и параллельным током, максимальны.

Эффект зацепления полоидальных гармоник наиболее заметен в полоидальной части возмущения магнитного поля. При низких аспектных отношениях в главной части возмущения магнитного поля на одну гармонику больше, чем в основной части поля смещений. Например, если в течении плазмы выделяются две вихревые ячейки, то в возмущениях давления и торoidalного поля будут большой положительный и большой отрицательный пики, а в возмущении полоидального поля будет уже четыре вихревые ячейки со сравнимыми амплитудами. Они соответствуют четырем нитевидным возмущениям торoidalного тока.

Вопрос 7.4.2. Рассмотрим одну гармонику возмущенного смещения

$$\xi = \xi(r) \cos(m\theta - n\varphi),$$

где θ — полоидальный угол вокруг магнитной оси. Какова величина гармоник $m \pm 1$ поля $\mathbf{V}_{\text{пол}}^1$ по сравнению с гармоникой m , если обратное аспектное отношение $\epsilon = r/R$?

В результате такого зацепления гармоник становится невозможно провести однозначную классификацию неустойчивостей на основе полоидального волнового числа. Нет даже однозначной топологической классификации. Например, в случае свободной границы для равновесия с малым аспектным отношением и малым широм кажется, что при увеличении q неустойчивость меняется непрерывно от $m=1$ до $m=2$, как это показано на рис. 7.3. Новая структура постепенно сдвигается наружу от внутренней стороны тора. Мы увидим в дальнейшем, что различие между неустойчивостями прямого цилиндра и тора становится сильнее при увеличении $\beta_{\text{пол}}$, и при этом неустойчивости концентрируются на внешней стороне тора.

Влияние торoidalности на инкременты можно исследовать, отправляясь от неустойчивости прямого цилиндра и постепенно сворачивая его в тор. Для плазмы с низким β увеличение торoidalности

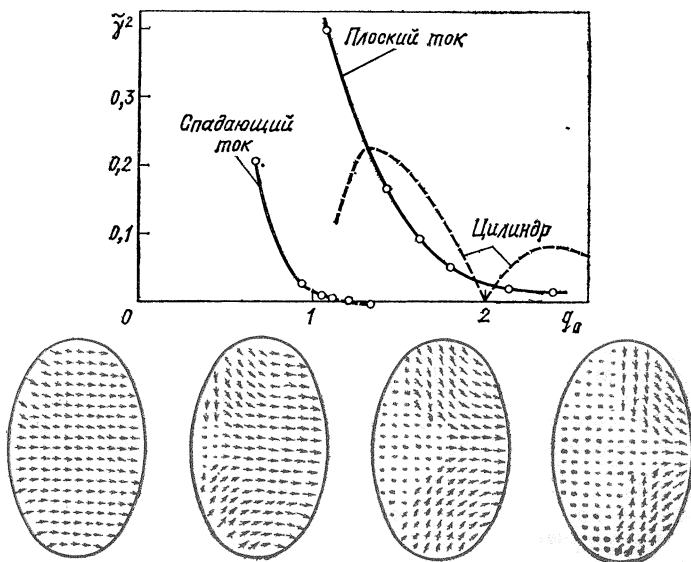


Рис. 7.3. Инкременты и собственные функции для неустойчивостей со свободной границей ($b/a=1,6$; $R/a=2,5$) в токамаке с «плоским» током [$p'(\psi)=\text{const}$, $I'=0$, $q_{\text{кр}}/q_{\text{ось}}=1,7$] и со «спадающим» током [$p'(\psi) \sim \psi$, $I'(\psi)=0$]. Из работы [19]

дальности постепенно уменьшает инкременты. При этом наиболее сильно уменьшаются инкременты длинноволновых неустойчивостей, которые чувствуют большую часть кривизны, чем коротковолновых.

§ 7.5. РЕЗЮМЕ

Большая часть раздела по натуральным координатам в основном предназначалась здесь в качестве сводки полезных формул для справок. Следует помнить, что существует много всевозможных натуральных координат. Частным случаем этих координат являются координаты Хамады, в которых силовые линии магнитного поля и линии тока выглядят прямыми линиями, а якобиан всюду нормирован на единицу.

Критерий устойчивости Мерсье является необходимым условием устойчивости и выведен для возмущений, достаточно сильно локализованных вблизи какой-либо рациональной поверхности внутри плазмы. Формальные выражения (7.2.49) или (7.2.46) для критерия Мерсье справедливы для любой равновесной конфигурации с вложенными магнитными поверхностями и широм. Частная форма критерия Мерсье (7.3.1) для тороидального шнура с круглым поперечным сечением, низким β и большим спектрным отношением дает в качестве необходимого условия $q \gg 1$ на магнитной оси. Другое приближение для осесимметричного тора с

произвольными поперечными сечениями и $\beta_{\text{пол}}$ приводит вблизи магнитной оси к критерию (7.3.2).

На крупномасштабные неустойчивости тороидальность влияет за счет зацепления полоидальных гармоник, что особенно сильно проявляется на возмущении полоидального магнитного поля. При низких β тороидальность уменьшает инкременты длинноволновых неустойчивостей.

§ 7.6. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Приведенный здесь вывод критерия Мерсье, а также ясное описание координат Хамады можно найти в работе:

1. **Greene J. M., Johnson J. L.** — *Phys. Fluids*, 1962, v. 5, p. 510—517.

Дополнительное разъяснение дано в статье:

2. **Greene J. M., Johnson J. L.** — *Plasma Phys.*, 1968, v. 10, p. 729—745.

Другой вывод со всеми подробностями описан в работе:

3. **Mercier C., Luc H.** *The MHD Approach to the Problem of Plasma Containment in Closed Magnetic Configurations.* EUR 5127e. Commission of the European Communities, Luxemburg, 1974.

В этих работах можно найти ссылки на более ранние выводы, сделанные Мерсье, Бино и др. Критерий Мерсье в форме (7.2.49), наиболее широко используемой в расчетах, выведен в статье:

4. **Соловьев Л. С.** — *Журн. эксперим. и теорет. физ.*, 1967, 53, с. 626.

Замечательные короткие и подробные обзоры аналитических условий устойчивости представляют работы:

5. **Соловьев Л. С.** — *Атомная энергия*, 1971, т. 30, вып. 1, с. 14.

6. **Соловьев Л. С.** — В кн.: *Вопросы теории плазмы.* Вып. 6. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1972, с. 210.

Более подробную информацию по натуральным координатам можно найти в работах:

7. **Соловьев Л. С., Шафранов В. Д.** — В кн.: *Вопросы теории плазмы.* Вып. 5. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1967, с. 3.

8. **Hamada S.** — *Nucl. Fusion*, 1962, v. 2, p. 23—37.

9. **Bateman G.** — *Ibid.*, 1973, v. 13, p. 227—238.

10. **Spies G. O., Nelson D. B.** — *Phys. Fluids*, 1974, v. 17, p. 1879—1884.

Из множества конкретных расчетов критерия Мерсье в § 7.3 упоминались:

11. **Шафранов В. Д., Юрченко Э. И.** — *Журн. эксперим. и теорет. физ.* 1967, т. 53, с. 1157.

12. **Lortz D., Nuhreberg J.** — *Nucl. Fusion*, 1973, v. 13, p. 821—827.

Соответствующий достаточный критерий выведен в работе:

13. **Lortz D.** — *Nucl. Fusion*, 1973, v. 13, p. 817—819.

Из многих аналитических расчетов крупномасштабных неустойчивостей в § 7.4 были ссылки на работы:

14. **Ware A. A., Haas F. A.** — *Phys. Fluids*, 1966, v. 9, p. 956—964.

15. **Ware A. A.** — *Ibid.*, 1964, v. 7, p. 2006—2011; *Phys. Rev. Lett.*, 1971, v. 26, p. 1304—1307.

16. **Frieman E. A. e. a.** — *Phys. Fluids*, 1973, v. 16, p. 1108—1125.

17. **Bussac M. N. e. a.** — *Phys. Rev. Lett.*, 1975, v. 35, p. 1638—1641.

Большое число работ, в которых приведены численные результаты по крупномасштабным неустойчивостям в тороидальной геометрии, собраны в трудах Токийской конференции МАГАТЭ, 1974 г. В частности, в § 7.4 использовались результаты работ:

18. **Schneider W., Bateman G.** — *Tokyo IAEA Conf.*, 1974, v. 1, p. 529—439.

19. **Wesson J. A., Sykes A.** — *Ibid.*, p. 449—461.

20. **Berger D. e. a.** — *IAEA Berchtesgaden Conf.*, CN-35/B11-4, 1976.

В дополнение к этим работам численные коды описаны в статьях:

21. **Bateman G., Schneider W., Grossman W.** — *Nucl. Fusion*, 1974, v. 14, p. 669—683.

22. **Sykes A., Wesson J. A.** — *Ibid.*, p. 645—648.

Принстонский спектральный код описан в работе:
 23. Grimm R. C., Greene J. M., Johnson J. L. Methods in Computational Physics. N. Y., Academic Press, 1976, v. 16, p. 253—258.
 Ссылки на лозанский код можно найти в [20].

Глава 8. ТОКАМАКИ С БОЛЬШИМ β

β — Это величина, характеризующая отношение плотности энергии плазмы к плотности энергии магнитного поля. Обычно используемое определение для $\langle\beta\rangle$ имеет вид:

$$\langle\beta\rangle \equiv \langle p \rangle / \frac{1}{2\mu} B_{\varphi 0}^2, \quad (8.1)$$

где $\langle p \rangle$ — усредненное по объему давление плазмы; $B_{\varphi 0}$ — вакуумное тороидальное магнитное поле на геометрической оси плазмы.

Почему для управляемого термоядерного синтеза желательно иметь высокое β ? Основным аргументом является то, что очень дорого создавать сильное магнитное поле, а $\langle\beta\rangle$ характеризует эффективность использования магнитного поля для удержания плазмы. Более конкретная аргументация основывается на том, что термоядерная мощность, выделяемая в дейтерий-тритиевой плазме, в предположении, что $10 \text{ кэВ} < T_e = T_D = T_T < 20 \text{ кэВ}$, а $n_D = n_T = 1/2n_e$, имеет следующий закон подобия:

$$n_D n_T \overline{\sigma v} \approx 10^{-18} \frac{\text{см}^{-3}}{\text{с} (\text{кэВ})^2} T_{DT}^2 [\text{кэВ}] n_D n_T [\text{см}^{-3}].$$

Отсюда следует, что при заданном магнитном поле выделяемая мощность, усредненная по объему плазмы, пропорциональна

$$(\beta^*)^2 \equiv \langle p^2 \rangle / \left(\frac{1}{2\mu} B_{\varphi 0}^2 \right)^2. \quad (8.2)$$

Отсюда можно сделать несколько выводов: 1) именно давление, а не температура или плотность по отдельности определяют выделяемую мощность; 2) при том же среднем давлении выделяемая мощность больше для пикированного профиля давления, а не для широкого; 3) при той же форме профилей и том же магнитном поле высокое $\langle\beta\rangle$ дает больший выход, чем низкое $\langle\beta\rangle$.

Для токамака было предложено много способов увеличения $\langle\beta\rangle$ или β^* . В настоящее время наиболее известными предложениями являются:

1. Вытягивание сечения плазмы, что дает возможность увеличить полоидальное магнитное поле.

2. Увеличение $\beta_{\text{пол}}$ с помощью быстрого нагрева плазмы, что приводит к возбуждению полоидальных токов.

3. Окружение плазмы с большим β областью с большими бессиловыми токами для улучшения условий устойчивости.

4. Уширение профиля тороидального тока.

5. Создание токамаков с низким аспектным отношением.

В этой главе обсуждаются первые два метода. О третьем методе пока мало что известно, соответствующие исследования находятся в стадии развития. Широкие профили тока, получаемые при увеличении тороидального тока в плазме, сопровождаются увеличенным уровнем МГД-активности, при котором экспериментально наблюдается уменьшение времени удержания энергии, что будет описано выше в гл. 11. Выбор аспектного отношения для токамаков обычно является инженерным компромиссом между физическими преимуществами низких аспектных отношений и необходимостью иметь доступ и место в центре тора для трансформатора и элементов конструкции. У большинства токамаков аспектное отношение лежит между тремя и пятью.

§ 8.1. ВЫТЯНУТОЕ СЕЧЕНИЕ

Возможные преимущества токамаков или пинчей с сильно вытянутым сечением широко обсуждаются, и в центре этого обсуждения находятся вопросы равновесия и макроскопической устойчивости. Многие соглашаются, что умеренная вытянутость или профилирование сечения могут улучшить параметры токамаков, хотя до недавнего времени считалось, что такая модификация не заслуживает связанных с ней затрат. Идея же сильновытянутых сечений ($b/a \geq 2$) была подвергнута сомнению из-за теоретических предсказаний, что такая плазма была бы сильно неустойчива при любых q и что поддерживать вытянутость было бы невозможно из-за пикирования тока к магнитной оси. Некоторые эксперименты, как это кажется, опровергают эти предсказания о неустойчивости, однако множество неясностей мешает на основе эксперимента сделать надежные заключения.

Попытаемся осветить обе стороны этой проблемы.

Идея создания тороидальных установок с вытянутым сечением была выдвинута независимо по нескольким различным причинам.

Один аргумент основан на предположении, что макроскопическая устойчивость и удержание определяются только величиной q , независимо от формы сечения. При вытягивании сечения плазмы с фиксированным q полоидальное поле должно быть увеличено, чтобы силовая линия обошла удлиненный полоидальный контур при том же числе оборотов вокруг главной оси. Это более сильное полоидальное поле способно удержать более высокое давление, а значит, и плазму с более высоким β . Кроме того, при фиксированном малом радиусе соответственно увеличивается и плотность продольного тока, а следовательно, и омический нагрев. Взяв простую модель однородного тока с эллиптическим сечением, рассмотренную в § 4.5, читатель может убедиться, что как полоидальное магнитное поле, так и плотность продольного тока при больших $b/a \geq 2$ увеличиваются пропорционально b/a , а $\langle \beta \rangle$ и

полный продольный ток растут при вытягивании плазмы, как b^2/a^2 . Можно показать [1], что увеличивается омический нагрев, уменьшается диффузия, уменьшаются потери тепла, появляется возможность естественного дивертора вблизи заострений сечения, а также имеется ряд других возможных преимуществ.

На основе соображений, подобных изложенным здесь, был осуществлен ряд экспериментов по ударному нагреву плазмы с сильно вытянутым сечением, начиная с Phagos'a в Лос-Аламосской национальной лаборатории (1968), TESI и TENQ в Юлихе (1971), белт-пинчей в Гаршинге (1977) и Лозанне (1975). (См. Европейские конференции или конференции МАГАТЭ за эти годы.) Из-за свойственной таким установкам большой индуктивности оказалось трудно сделать достаточно быстрый ударный нагрев и преодолеть быстрое остывание, связанное с излучением примесей. Медленный же ударный нагрев приводил к нежелательному сжатию и отрыву плазмы от стенок, так что при этом часто было невозможно с помощью токов во внешних катушках поддержать сильно вытянутую форму сечения и плазма быстро стягивалась в более круглое сечение (как предсказывалось в § 4.6). По этим причинам экспериментальное наблюдение полной устойчивости при $q_{гр} \geq 3$ [2] было предметом споров.

Вопрос 8.1.1. Попробуйте применить критерий Сайдема к тонкой цилиндрической плазменной оболочке (давление сосредоточено внутри оболочки и равно нулю вне ее). Предположите, что кроме тороидального тока есть полоидальный ток, который течет параллельно оси цилиндра — в противоположных направлениях по внутренней и внешней частям оболочки протекает одинаковый ток. Налагает ли критерий Сайдема ограничения на $\beta_{пол}$? Есть ли неустойчивости, сосредоточенные вблизи внутреннего или внешнего края оболочки?

В 1968 г. доктор Окава рассмотрел вытянутое сечение как мультипольную конфигурацию, в которой внутренние мультипольные катушки заменены токами плазмы. Мультипольные установки заведомо обладают большим широм и областью с минимумом среднего магнитного поля. Экспериментально установлено, что уровень флуктуаций в них более низкий, а времена удержания более длительные, чем в аналогичных установках без внутренних мультиполей. Идеи Окавы привели к серии экспериментов на «Дублете» в «Дженерал атомик».

Вопрос 8.1.2 [5]. Какова форма плазмы с однородным током J_0 при наличии квадрупольного (I_2) и октупольного (I_4) поля?

$$\psi = -\pi J_0 (x^2 + y^2) + I_2 (x^2 - y^2) - I_4 (x^4 - 6x^2y^2 + y^4).$$

Насколько сильными должны быть токи, чтобы создать две магнитные оси эллиптического типа? Какова максимальная ширина плазмы?

Аргументы в пользу создания токамака с вытянутым D-образным сечением были сформулированы Л. А. Арцимовичем и В. Д. Шафрановым. Первым токамаком, имеющим такую форму шнура, был перстеньковый токамак Т-9. Небольшая добавка треугольности с острием, направленным от оси симметрии тора, помогает удовлетворить необходимый критерий Мерсье и достаточный критерий Лортца, как это следует из § 7.3.

В § 4.5 и 4.6 было показано, что плазму лучше сжимать стенками, составленными из токов, противоположных току плазмы, чем растягивать ее с помощью токов, параллельных току плазмы. Остается, однако, та трудность, что для поддержания вытянутости стенка должна быть близка к плазме, а профиль тока в плазме должен быть широким. Это представляет определенную проблему для установок с ударным нагревом, так как при ударном нагреве трудно избежать сжатия плазмы. Необходимо использовать очень быстрые высоковольтные разряды, а увеличенная индуктивность установок с вытянутым сечением не способствует быстрым разрядам. Особенности равновесия с некруглым сечением в установках с ударным нагревом приводят к сильному стягиванию плазмы к оси, а вытянутая плазма сжимается в более круглое сечение. Быстрое осевое стягивание плазмы, при котором она разбивается на множество переплетенных нитей, экспериментально наблюдали на θ -пинче с твердым стержнем Дюкс, Диксон и Элтон в Военно-морской исследовательской лаборатории (NRL). Подробно процесс осевого стягивания на белт-пинче исследовал Краузе [3].

Стягивание к оси представляет проблему и для установок с омическим нагревом, таких, как токамаки, так как процессы переноса стремятся сконцентрировать ток вблизи магнитной оси, т. е. вдаль от стенок. Если сконцентрировать ток в конфигурации «Дублета», то плазма стремится распасться на «капли», которые представляют собой два отдельных плазменных шнура. С помощью искусного манипулирования внешними токами в системе активной

обратной связи эти шнуры можно сдвинуть друг к другу и попытаться (рис. 8.1) поддержать конфигурацию «Дублета». При этом есть опасность того, что отдельные шнуры сольются в один шнур с приблизительно круглым сечением, ток в котором будет выше условия устойчивости Кру-

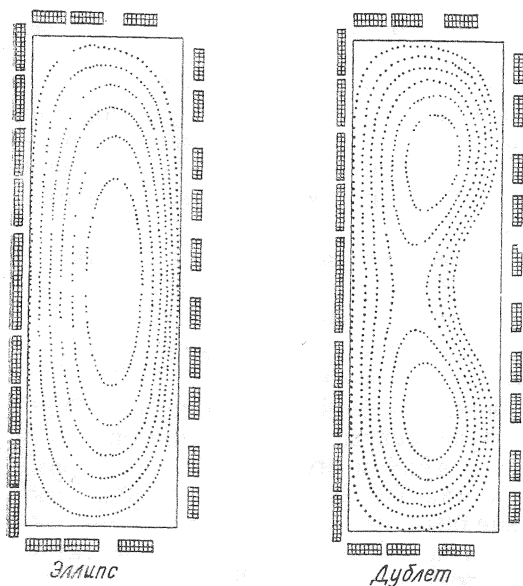


Рис. 8.1. Магнитные поверхности в вытянутой плазме в сравнении с конфигурацией «Дублета». Показано также сечение обмоток, служащих для профилирования сечения плазмы. Взято с любезного разрешения EPRI из расчетов установки Дублет III, предложенной Отделением синтеза компании «Дженерал атомик»

скала — Шафранова. Поскольку профили меняются медленно с характерным временем процесса переноса, существует реальная надежда, что равновесие можно контролировать с помощью системы обратных связей.

Однако даже если будет найден способ контроля профилей и формы этих равновесий с вытянутым сечением, остается много вопросов, связанных с макроскопической устойчивостью таких конфигураций. Поэтому рассмотрим сначала в общих чертах влияние высоких β на МГД-неустойчивости.

§ 8.2. НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРИ БОЛЬШОМ β : МОДЕЛЬ ПОВЕРХНОСТНОГО ТОКА

Наиболее обширное теоретическое исследование устойчивости токамаков с большим β выполнили Фрайдберг, Хиз, Мардер, Гроссман и Гудблуд в Лос-Аламосе [6—9]. В большинстве этих работ они использовали модель с поверхностным током, что позволило рассмотреть широкий диапазон форм сечения и параметров. Их работы показали, что для устойчивости плазмы с высоким β величина q не является подходящей характеристикой. А именно, существует *критическое* β , выше которого нет устойчивости при любом значении q . Неустойчивости, которые наблюдаются, если β выше этого критического значения, обычно называются *баллонными модами*, так как они заставляют плазму выпучиваться там, где наиболее сильно дестабилизирующее влияние кривизны. Чтобы изучить этот тип неустойчивостей в его простейшей форме, рассмотрим выражение для δW в модели поверхностного тока.

Необходимо вспомнить (см. § 4,6), что в равновесии с чисто поверхностным током давление внутри плазмы однородно: $\nabla p^0 = 0$, а токи, за исключением тока на поверхности плазмы, отсутствуют: $\mathbf{J}^0 = 0$. Отсюда следует, что вклад в δW от плазмы (5.4.2) сводится к выражению

$$\delta W_F = \frac{1}{2} \int_{\text{пл}} d^3 x \left\{ \frac{1}{\mu} |\mathbf{B}^1|^2 + \Gamma p^0 |\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}|^2 \right\}, \quad (8.2.1)$$

где возмущение магнитного поля \mathbf{B}^1 связано с вектором смещения соотношением (5.2.5)

$$\mathbf{B}^1 = \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}^0). \quad (8.2.2)$$

Вклад от возмущения поверхности плазмы (5.4.6) равен

$$\delta W_S = \frac{1}{2} \int dS \cdot \left[\left[\nabla \frac{1}{2\mu} (B^0)^2 \right] (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\xi})^2 \right], \quad (8.2.3)$$

где $\llbracket \rrbracket$ означают скачок при переходе границы плазмы изнутри наружу. Наконец, вклад от внешней вакуумной области (5.4.5) равен

$$\delta W_{\text{вак}} = \frac{1}{2} \int_{\text{вак}} d^3 x \frac{1}{\mu} |\mathbf{B}^1|^2. \quad (8.2.4)$$

Для определения границы устойчивости требуется возмущение, минимизирующее δW . Вклад (8.2.1) от собственно плазмы минимизируется несжимаемым смещением $\nabla \cdot \xi = 0$ и вакуумным возмущенным магнитным полем $\nabla \times \mathbf{B}^1 = 0$. Вклады δW_F и $\delta W_{\text{вак}}$ при этом сводятся к аналогичному выражению, которое наиболее легко рассчитать, полагая

$$\mathbf{B}^1 \equiv \nabla \varphi, \quad \nabla^2 \varphi = 0 \quad (8.2.5)$$

и используя затем теорему Гаусса

$$\int d^3 x |\mathbf{B}^1|^2 = \int d\mathbf{S} \cdot \nabla \varphi \varphi. \quad (8.2.6)$$

При этом все слагаемые в δW сводятся к поверхностным интегралам. Отметим, что скалярный потенциал φ в общем случае неоднозначно определен, так как область многосвязная.

Вопрос 8.2.1. Можно ли совместить вектор несжимаемого смещения (8.2.2) с вакуумным возмущением магнитного поля внутри плазмы?

Чтобы вычислить вклад поверхностного члена (8.2.3), разобьем $(B^0)^2$ на квадрат полоидальной и тороидальной компонент магнитного поля. Поскольку каждая из них является вакуумным полем $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, можно написать $\frac{1}{2} \nabla B^2 = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} = B^2 \hat{\mathbf{B}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{B}} \nabla \mathbf{B} \cdot \nabla |\mathbf{B}|$. Первое слагаемое — это обычное выражение кривизны, которая записана теперь для $B_{\text{пол}}^0$ и $B_{\text{тор}}^0$ отдельно, а второй член из δW_S выпадает, так как \mathbf{B}^0 тангенциально поверхности плазмы. Поскольку $\mathbf{B}_{\text{пол}}^0 = 0$ внутри плазмы (для осесимметричного равновесия), выражение (8.2.3) можно представить в виде

$$\delta W_S = -\frac{1}{2\mu} \int d\mathbf{S} \cdot \{ \mathbf{k}_{\text{пол}} (B_{\text{пол.внешн}}^0)^2 - \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} [(B_{\text{тор}}^0)^2] \} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \xi)^2,$$

где $\mathbf{k}_{\text{пол}} = \hat{\mathbf{B}}_{\text{пол}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{B}}_{\text{пол}}$, а $\mathbf{k}_{\text{тор}} = \hat{\mathbf{R}}/R$. Эти слагаемые в δW_S являются дестабилизирующими там, где радиус кривизны направлен в плазму, и стабилизирующими, где радиус кривизны направлен от плазмы. Выпуклые поверхности являются стабилизирующими, тогда как выпуклые части поверхности дают дестабилизирующий вклад.

Чтобы продемонстрировать дестабилизирующий эффект больших β , рассмотрим модель поверхностного тока для плазмы в прямом цилиндре круглого сечения. Возмущение магнитного поля внутри плазмы равно

$$\mathbf{B}^1 = \nabla \varphi, \quad \varphi = -B_z^0 \text{внутр} \xi_a \frac{I_m(kr)}{I_m(ka)} \exp[i(m\theta - kz)], \quad (8.2.8)$$

так что вклад в потенциальную энергию равен

$$\delta W_F = \frac{\pi}{2\mu} \xi_a^2 \frac{(ka)^2}{m} (B_z^0 \text{внутр})^2, \quad (8.2.9)$$

где B_z^0 — это поле B_z внутри плазмы. Полоидальная кривизна равна \widehat{r}/a , а тороидальная равна нулю, так что (8.2.7) сводится к

$$\delta W_S = -\frac{\pi}{2\mu} \xi_a^2 (B_{\text{пол}}^0)^2. \quad (8.2.10)$$

Вклад внешней вакуумной области в δW дается выражением (6.4.2). Определим теперь β как отношение давления плазмы к плотности энергии внешнего магнитного поля:

$$\beta \equiv \frac{2\mu p}{B_z^2 \text{внешн} + B_z^2 \text{пол}} = 1 - \frac{B_z^2 \text{внутр}}{B_z^2 \text{внешн} + B_z^2 \text{пол}}. \quad (8.2.11)$$

Используя соотношение равновесия

$$2\mu p = B_{\text{пол}}^2 + B_z^2 \text{внешн} - B_z^2 \text{внутр}, \quad (8.2.12)$$

а также определение на поверхности плазмы значения q , соответствующего одной длине волны

$$q = ka B_z \text{внешн} / B_{\text{пол}}, \quad (8.2.13)$$

можно δW написать в виде

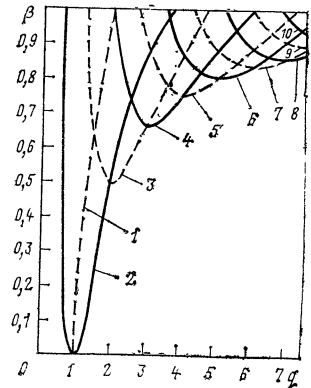
$$\delta W = \frac{\pi}{2\mu} \xi_a^2 B_{\text{пол}}^2 \left\{ \underset{\text{граница}}{-1 + \frac{(m-q)^2}{m} \frac{1 + (a/r_{\text{ст}})^2}{1 - (a/r_{\text{ст}})^2}} + \underset{\text{плазма}}{\frac{1-\beta}{m} q^2 [1 + (ka/q)^2]} \right\}. \quad (8.2.14)$$

Для длинных волн $ka \ll 1$, если стенка удалена от плазмы $a/r_{\text{ст}} \ll 1$, плазма неустойчива, если

$$\beta > 1 - [m - (m - q)^2] / q^2. \quad (8.2.15)$$

Огибающая неустойчивой области начинается со значения $q=1$ при низком β , но быстро поднимается до высоких β при увеличении q , как это показано на рис. 8.2. Для любого q , большего единицы, существует критическое β , соответствующее появлению неустойчивости. Отметим, что значение β может меняться независимо от q за счет скачка в B_z .

Рис. 8.2. Диаграмма устойчивости β от q для модели поверхностного тока в цилиндрическом плазменном шнуре круглого сечения. Плазма неустойчива в области выше каждой кривой по отношению к моде с указанным на кривой полоидальным волновым числом. Из работы [7]



Вопрос 8.2.2. Легко ли стабилизировать такие неустойчивости при большом β за счет приближения стенки или за счет эффекта конечной длины волны [$ka \sim O(1)$]?

Если сечение плазмы превращать в эллиптическое, то эти неустойчивости, связанные с давлением, становятся более опасными. Поскольку в геометрии прямого цилиндра полоидальное магнитное поле на поверхности остается однородным, кривизна на заострениях эллипса увеличивается пропорционально b/a^2 и уменьшается как a/b^2 на боках эллипса. При вытягивании плазмы увеличенная кривизна на закруглениях приводит к неустойчивостям при все более низких β , как это показано на рис. 8.3. Мардер [7] численно рассчитал структуру возмущения на поверхности плазмы и стабилизирующие слагаемые магнитной энергии. Аналитически их вычислить тяжело. Однако из природы дестабилизирующих членов ясно, что неустойчивость приводит к выпиранию плазмы на закруглениях эллипса, оставляя более плоскую часть в основной незатронутой. Кроме того, ясно, что положение можно несколько улучшить, уменьшая кривизну закруглений. Например, Мардер, рассмотрев геометрию рейстрека — два прямых отрезка, соединенных полуокружностями, — нашел некоторое увеличение критического β . При любом заданном значении q , однако, полоидальное магнитное поле увеличивается при вытягивании сечения, но даже при оптимальной кривизне дестабилизирующий член становится больше, чем внутренний стабилизирующий. Поэтому в прямом цилиндре вытянутость дает только скромное увеличение критического β .

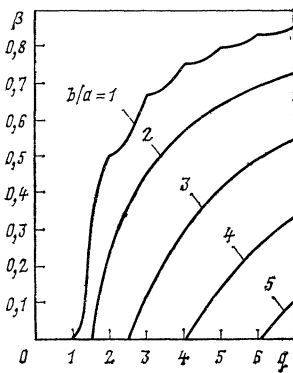


Рис. 8.3. Конфигурация, соответствующая рис. 8.2, более неустойчива, если сечение становится эллиптическим. Из работы [7]

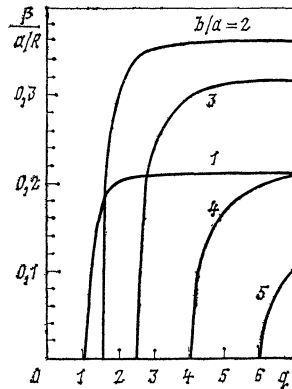


Рис. 8.4. Диаграммы устойчивости для тороидальной плазмы с поверхностным током с вытянутым по вертикали эллиптическим сечением в приближении большого аспектного отношения. Плазма неустойчива в областях, расположенных выше кривых. Из работы [6]

Соответствующие тороидальные модели в пределе большого аспектного отношения были разработаны Фрайдбергом и Хизом [6], а для любого аспектного отношения Фрайдбергом и Гроссманом [8]. Если $\beta \sim O(\epsilon)$, $\epsilon \equiv a/R$, так что давление плазмы удерживается скачком тороидального поля, а не полоидальным полем, последний член в (8.27) дает большой дестабилизирующий вклад на внешней стороне тора, несмотря на то, что тороидальная кривизна, вообще говоря, меньше, чем полоидальная. По этой причине при высоких β эффект тороидальности дестабилизирующий. Тороидальность также влияет на стабилизирующие члены, связанные с увеличением магнитной энергии, но это трудно поддается интерпретации.

Некоторые результаты для тора с большим аспектным отношением собраны на рис. 8.4. Было найдено, что для тора круглого сечения с поверхностным током максимально устойчивое β составляет $\beta = 0,21 a/R$, что существенно ниже, чем в соответствующем случае прямого цилиндра. При эллиптическом вытягивании в вертикальном направлении максимальное критическое β увеличивается до $\beta = 0,37a/R$ при вытянутости $b/a = 2,2$, а затем быстро падает при дальнейшем увеличении вытянутости.

Если рассмотреть тор с конечным аспектным отношением, то результаты оказываются более пессимистическими. Для тора круглого сечения результаты приведены на рис. 8.5. Отметим, что предел большого аспектного отношения $R/a \rightarrow \infty$ соответствует нижнему левому углу этого графика. Фрайдберг и Гроссман [8] привели также соответствующие результаты для эллиптического и дублетного сечений. Максимальное критическое бета $\beta = 0,13$ при фиксированном аспектном отношении $R/a = 2,44$ было получено для такой модели поверхностного тока в конфигурации Дублета при $b/a = 4$.

Модель поверхностного тока предназначена, конечно, не для количественного сравнения с экспериментом, а только для определения основных тенденций. Для плазмы с распределенным током и вытянутым сечением проведены менее подробные исследования. Аналитическое исследование винтовых мод эллиптической плазмы с $\beta_{\text{пол}} \sim O(1)$, предпринятое Лавалем, Пелла и Суле [10], показало, что пикированные профили тока подавляют моды с высшими полоидальными гармониками так, что условие устойчивости сводится снова примерно к $q=1$. Например, если равновесный профиль тока имеет вид

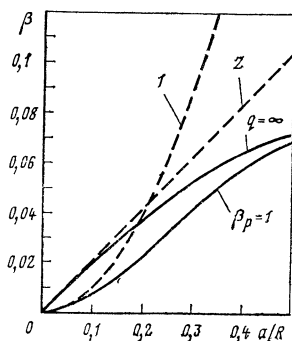


Рис. 8.5. Диаграмма устойчивости для тороидальной плазмы с поверхностным током и с круглым сечением. Сплошные кривые получены из численного расчета, а пунктирные — из аналитического приближения:

1 — традиционный закон подобия; 2 — закон подобия для высокого β . Из работы [9]

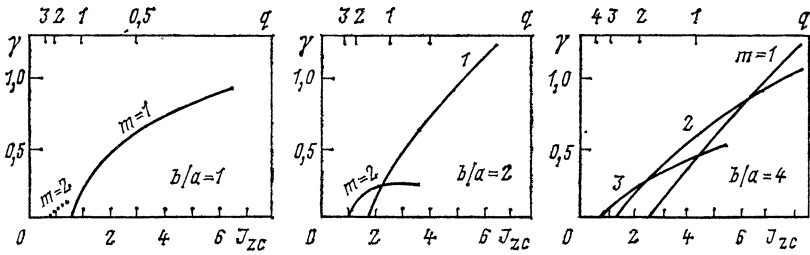


Рис. 8.6. Инкременты как функции плотности тока в центре для неустойчивостей с закрепленной границей в прямом цилиндре с прямоугольным сечением: $ka=1$, $r'(\psi)=J_{zc}\psi/\psi_c$. Из работы [12]

$$J_{\text{тор}}(\psi) \sim \psi,$$

что дает приблизительно параболическое распределение тока, моды с высшими m при $b/a \gg 1$ неустойчивы только в узких интервалах значений q на границе плазмы:

$$|nq_{\text{гр}} - m| < m \exp \left\{ -\frac{4m}{\pi^2} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right\},$$

где m относится к полоидальной фурье-гармонике по угловой переменной в эллиптических координатах. Если плотность тока однородна, полосы неустойчивости q расширяются и полностью перекрываются при увеличении b/a .

Аналогичное перекрытие зон неустойчивостей наблюдали Бейтман, Шнейдер и Гроссман [12] в численных расчетах неустойчивостей с закрепленной границей в прямом цилиндре с прямоугольным сечением и $J_{\text{тор}}=J_0\psi$. Было отмечено, что каждая неустойчивость состоит из нескольких вихревых ячеек скорости, раскручивающих друг друга и проворачивающихся по винту вдоль цилиндра. При вытягивании сечения номер моды все еще можно однозначно определить как половину числа вихревых ячеек или как число положительных пиков возмущенного давления. Хотя с увеличением вытянутости плотность продольного тока и β , соответствующие границе устойчивости отдельно взятой моды, увеличиваются, области неустойчивости при переходе к высшим модам становятся шире и перекрываются при вытягивании плазмы, как это показано на рис. 8.6. И что особенно плохо,

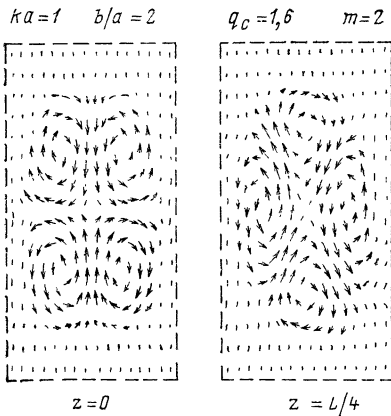


Рис. 8.7. Картина течения для моды $m=2$ с закрепленной границей в прямоугольном прямом цилиндре в сечениях, разнесенных на одну четверть длины волны. Из работы [12]

при больших вытянутостях наиболее опасными кажутся неустойчивости с большими волновыми числами. Например, мода $m=2$, показанная на рис. 8.7, больше не является локализованной слабой неустойчивостью. Однако необходимо еще посмотреть, как нелинейная эволюция этих неустойчивостей перестраивает плазму в реальных экспериментальных условиях.

§ 8.3. ТОКАМАКИ С ВМОРОЖЕННЫМИ ПОТОКАМИ

Высокие β можно получить и без специального вытягивания сечения в результате быстрого нагрева плазмы и возбуждения тем самым полоидальных диамагнитных токов для удержания дополнительного давления. Эти полоидальные токи возбуждаются благодаря некоторому расширению плазмы во время нагрева. В течение многих лет существовало мнение, что давление плазмы в токамаках ограничено, как следует из простого соображения, основанного на условиях равновесия: при увеличении давления вертикальное магнитное поле, необходимое для предотвращения расширения плазмы по большому радиусу (см. § 4.6), должно быть увеличено и при $\beta_{\text{пол}} \leq 1/\epsilon$, $\epsilon \equiv a/R$, т. е. когда $\beta \sim \sim \beta_{\text{пол}} B_{\text{пол}}^2 / B_{\text{тор}}^2 \leq \epsilon / q^2$, оно обратит в нуль полоидальное магнитное поле на внутренней стороне тора. Получающаяся в результате сепаратриса ухудшила бы удержание плазмы и заставила бы плазму сокращаться. Однако если плазму нагреть за время меньшее, чем время диффузии магнитного поля (но большее пролетного альфвеновского времени), то магнитные потоки будут заморожены в плазму и поэтому сепаратриса не сможет подвинуться внутрь плазмы, уменьшая ее сечение. Эта концепция, названная *токамаком с замороженными потоками* (FCT — flux conserving tokamak), была аналитически развита Кларком и Сигмаром [26], а численно исследовалась Дори и Пенгом [27]. Сейчас считается, что для усредненного по объему β , которое можно достигнуть в токамаке, нет предела по равновесию.

С теоретической точки зрения последовательность равновесий с замороженными потоками представляет один из путей, ведущих к равновесиям с произвольно большими β . В течение ряда лет равновесия в токамаке вычислялись заданием подходящих функций $p(\psi)$ и $I(\psi) = RB_{\theta}$, которые появляются в уравнении Грэда — Шафранова (4.4.10). При появлении при большом β особенностей, таких, как сепаратриса или обращенный продольный ток на внутренней стороне тора [28], было неясно, как выбрать $p(\psi)$ и $I(\psi)$, чтобы улучшить равновесие. В последовательности равновесий с замороженными потоками, однако, заданной является функция $q(\psi) \equiv d\psi_{\text{тор}}/d\psi_{\text{пол}}$, а для $p(\psi)$ при этом можно выбрать любую последовательность. Функция источника $I(\psi)$ для уравнения Грэда — Шафранова определяется итерациями из соотношения

$$q(\psi) = \frac{I(\psi)}{2\pi} \oint \frac{dl}{|B_{\text{пол}}|} \frac{1}{R^2}, \quad (8.3.1)$$

где $\oint dl$ — контурный интеграл вдоль магнитной поверхности в любом сечении. Чтобы вывести это соотношение, отметим, что дифференциальный элемент поверхности между двумя магнитными поверхностями ψ и $\psi + d\psi$ равен $\oint dl \frac{d\psi}{|\nabla\psi|}$. Отсюда следует, что

$$q(\psi) = \frac{d\psi_{\text{тор}}}{d\psi_{\text{пол}}} = \frac{d}{d\psi_{\text{пол}}} \int d\mathbf{S} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} B_{\varphi} = \frac{d}{d\psi_{\text{пол}}} \oint dl \frac{d\psi_{\text{пол}}}{|\nabla\psi_{\text{пол}}|} \frac{I(\psi)}{R}$$

и справедливость (8.3.1). Так как сам интеграл $\oint (dl/|B_{\text{пол}}|) R^{-2}$ можно вычислить только, если известно $\psi(R, y)$, то необходимы итерации.

Чтобы показать, что в последовательности равновесий с замороженными потоками сохраняется функциональная форма $q(\psi)$, рассмотрим математическое тождество

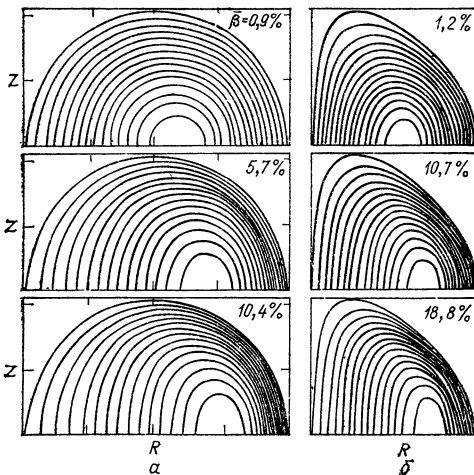
$$\frac{d}{Dt} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \equiv \int d\mathbf{S} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \right\} \quad (8.3.2)$$

и закон Фарадея $\partial \mathbf{B} / \partial t = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})$, откуда следует, что все магнитные потоки переносятся с идеально проводящей жидкостью:

$$\frac{d\psi}{dt} = 0 \quad \text{для любого } \psi \equiv \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}. \quad (8.3.3)$$

Отсюда следует, что при накачивании давления (например, нагревом или увеличением плотности) и перераспределении плазмы от одного равновесия к другому профиль q должен переноситься вместе с потоками:

$$\frac{d}{dt} q(\psi, t) = 0 \rightarrow q = q(\psi). \quad (8.3.4)$$



На рис. 8.8 показаны два примера равновесий в токамаке с замороженными потоками. Если β становится сравнимым с обратным аспектным отношением $\epsilon = a/R$, давление плазмы начинает удерживаться в основном диамагнитными токами, пе-

Рис. 8.8. Магнитные поверхности для двух серий равновесий в токамаке с замороженными потоками. Ось симметрии тора находится слева:

($q_0=1, A=4$), a — круглое сечение ($q_a=3,0$). При большом β внутренние поверхности приобретают D-образную форму; b — D-образное сечение ($q_a=4,8$). Из работы [27]

ресекающими тороидальное магнитное поле, в то время как полоидальное магнитное поле служит главным образом, чтобы центрировать плазму относительно стенок. На рис. 8.8 видно, что центральные магнитные поверхности смещаются по направлению к внешней стороне тора. Кроме того, продольный ток сосредоточивается в серповидной области около внешней поверхности. На внутренней стороне плазмы образуется «мертвая» зона с низкими давлениями и плотностью тока. Для более эффективного использования объема плазмы эту область необходимо уменьшить за счет придания плазме D -образного сечения. Как видно из рис. 8.8, в D -образном сечении плазмы даже при более высоком значении q на границе плазмы (на оси во всех случаях $q_{ось} = 1$), усредненное β значительно больше. При низких аспектных отношениях D -образная форма для тороидальной плазмы кажется естественной и, как мы увидим ниже, имеет лучшие свойства по устойчивости.

Вопрос 8.3.1. Предположим, что плазма окружена тороидальными катушками с большой индуктивностью. Каким образом сохраняется тороидальный поток внутри обмоток, когда увеличивается давление плазмы и образуются диамагнитные токи?

Вопрос 8.3.2. Рассмотрим плоский слой плазмы с током, окруженный идеально проводящей мембраной посередине. Предположим, что мембрану сместили поближе к одной из стенок. Как изменятся плотность тока и полный ток, если движение происходит при замороженных потоках? Приводит ли к аналогичному эффекту сдвиг наружу магнитной оси тороидальной плазмы?

Вопрос 8.3.3. Могли бы Вы продемонстрировать, построив логическую последовательность причин и следствий, как нагрев плазмы и последующее расширение возбуждают диамагнитные полоидальные токи? Как влияет расширение на плотность продольного тока?

Вопрос 8.3.4. Рассмотрим прямолинейную цилиндрическую плазму круглого сечения, окруженную вакуумом и идеально проводящей стенкой. Предположим, что плазма нагревается и расширяется при сохранении q ($q = aB_z/RB_\theta$) на границе плазмы, а также обоих магнитных потоков в вакуумной области. Можно ли шить эти три условия сохранения на границе плазмы?

В настоящее время считается, что неустойчивости могут наложить ограничение на максимальное β , которое можно удержать в токамаке. По иронии судьбы, налагаемый неустойчивостями предел на β , грубо говоря, тот же, который ранее считался пределом по равновесному β :

$$\beta < (\text{геометрический фактор}) \varepsilon/q^2, \quad \varepsilon \equiv a/R. \quad (8.3.5)$$

Тодд и др. [29] привели упрощенный вывод этого важного критерия устойчивости и здесь мы дадим его набросок.

Рассмотрим энергетический принцип в виде (5.4.9)

$$\delta W = \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ \frac{1}{\mu} |\mathbf{B}_\perp^1|^2 + \frac{1}{\mu} |\mathbf{B}_\parallel^1 - \mu \mathbf{B} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p / |\mathbf{B}|^2 + \Gamma p |\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}|^2 + \right. \\ \left. + \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{B}} \times \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{B}^1 - 2 \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{k} \right\},$$

где

$$\mathbf{B}^1 = \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi}_\perp - \nabla \boldsymbol{\xi}_\perp \cdot \mathbf{B} - \boldsymbol{\xi}_\perp \cdot \nabla \mathbf{B}. \quad (8.3.6)$$

Для устойчивости минимальное значение δW должно быть положительно. Упрощенную процедуру минимизации можно провести следующим образом: третий положительно определенный член в (5.4.9) можно исключить с помощью минимизации по отношению к ξ_{\parallel} — параллельной к равновесному магнитному полю компоненте смещения, которая не появляется ни в каких других членах. Разложим теперь возмущение магнитного поля \mathbf{B}^1 на параллельную и перпендикулярную компоненты:

$$\mathbf{B}_{\parallel}^1 = -\xi_{\perp} \cdot \nabla |B| - |B| \nabla \cdot \xi_{\perp} + \mathbf{B} \cdot \nabla \xi_{\perp} \cdot \hat{\mathbf{B}}; \quad (8.3.7)$$

$$\mathbf{B}_{\perp}^1 = \mathbf{B} \cdot \nabla | \xi_{\perp} | \hat{\xi}_{\perp} - |B| \hat{\xi}_{\perp} \cdot \nabla \hat{\mathbf{B}} + | \xi_{\perp} | (\mathbf{B} \cdot \nabla \hat{\xi}_{\perp})_{\perp}, \quad (8.3.8)$$

мало

мало

где $\hat{\mathbf{B}}$ и $\hat{\xi}_{\perp}$ — единичные векторы, а последними двумя членами в (8.3.8) можно пренебречь. Используя тождество

$$\mu \xi \cdot \nabla p / |B| = \xi_{\perp} \cdot [-\nabla |B| + |B| \mathbf{k}], \quad (8.3.9)$$

где $\mathbf{k} \equiv \hat{\mathbf{B}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{B}}$ — кривизна силовой линии равновесного поля, можно показать, что второй член в (5.4.9) исключается, если взять

$$\nabla \cdot \xi_{\perp} \simeq -2 \xi \cdot \mathbf{k}. \quad (8.3.10)$$

Это условие возникает в основном из минимизации δW по отношению к компоненте ξ , лежащей на магнитной поверхности, но перпендикулярной к \mathbf{B} .

Наконец, рассмотрим такие равновесия, при которых неустойчивость в основном обусловлена давлением [последний член в (5.4.9)], так что предпоследним членом, который дает токовые неустойчивости, можно пренебречь. Тогда критерий устойчивости вытекает из сравнения последнего слагаемого

$$-2 \xi \cdot \nabla p \xi \cdot \mathbf{k} \sim 2 |p/a| \frac{1}{R} | \xi_{\perp} |^2 \quad (8.3.10')$$

со стабилизирующим первым членом

$$\frac{1}{\mu} |B_{\perp}^1|^2 \simeq \frac{1}{\mu} (\mathbf{B} \cdot \nabla | \xi_{\perp} |)^2 \sim \frac{1}{\mu} |B/Rq|^2 | \xi_{\perp} |^2. \quad (8.3.11)$$

При оценке величины $\mathbf{B} \cdot \nabla | \xi_{\perp} |$ предполагалось, что ξ_{\perp} велико только на внешнем обводе тора на отрезке силовой линии длины $1/Rq$. В качестве характерной длины для градиента давления взят малый радиус a , а кривизна силовой линии на внешней стороне тора при q , большем единицы, равна приблизительно $1/R$. Из сравнения этих двух членов в (5.4.9) следует критерий устойчивости (8.3.5). Очевидно, что неустойчивость наиболее сильна там, где градиент давления максимален, что придает этим модам характерную баллонную структуру. Отметим, что в (8.4.5) надо подставлять q , взятое на поверхности максимального градиента давления.

В пределе больших тороидальных волновых чисел ($n \gg 1$) нейтрально устойчивые β масштаба ϵ/q^2 , как и в (8.3.5), были строго получены Добротом, Нельсоном и др. [33]. На рис. 8.9 видно, как этот закон подобия сшивается с критерием устойчивости $q_{ось} > 1$ для внутренней винтовой моды $m=1$ или критерием Мерсье (для круглого сечения). При увеличении $\beta_{пол}$, если двигаться вдоль кривой, соответствующей границе устойчивости, начиная с нижнего левого конца, происходит резкий переход от критерия устойчивости для малого бета $q_{ось} > 1$ к критерию для высокого бета $\beta \leq \epsilon/q^2$.

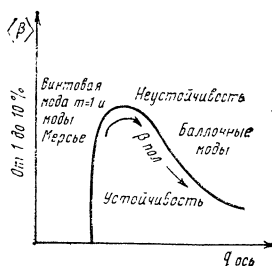


Рис. 8.9. Схематическая диаграмма устойчивости для тороидальной плазмы (по Д. Б. Нельсону)

Высота этой кривой, т. е. максимальное β , которого можно достичь, зависит от формы сечения и профиля плазмы. Очевидно, что для устойчивости баллонных мод лучше иметь низкие аспектные отношения (R/a). Некоторая вытянутость в комбинации с D -образной формой дополнительно увеличивает максимальное β . Широкие профили давления и тока хороши для устойчивости внутренних мод, но оказываются плохими для мод со свободной границей, так что для оптимума необходим компромисс. Для устойчивости полезным оказывается окружение плазмы бессиловой областью, однако и здесь необходим компромисс, чтобы ядро плазмы с высоким β не стало слишком малым. Шир оказывает смешанный эффект на баллонные моды, однако, как мы увидим ниже, слишком большой шир усиливает резистивные неустойчивости.

При увеличении $\beta_{пол}$ наблюдается резкое изменение в графиках инкрементов (рис. 8.10) и в пространственной структуре неустойчивостей (рис. 8.11). При низком β собственные функции на границе устойчивости локализованы вблизи магнитной оси, как показано на рис. 8.11, б и в для типичной моды $m=1, n=1$. Однако, если $\beta_{пол}$ растет, собственная функция сдвигается наружу к границе плазмы и приобретает баллонный характер, как это видно из рис. 8.11, д, е. На графиках показаны контуры возмущения давления в результате конвекции в вихревых ячейках

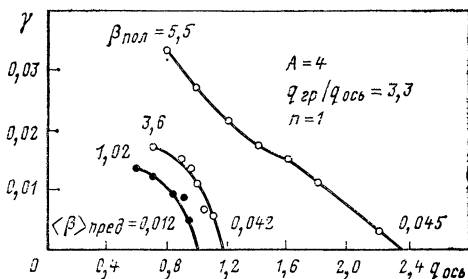


Рис. 8.10. Графики инкрементов для тороидальной плазмы, показанной справа на рис. 8.8, при увеличении $\beta_{пол}$. Из работы [30]

Равновесное давление

 $\varphi=0^\circ$

Возмущенное давление

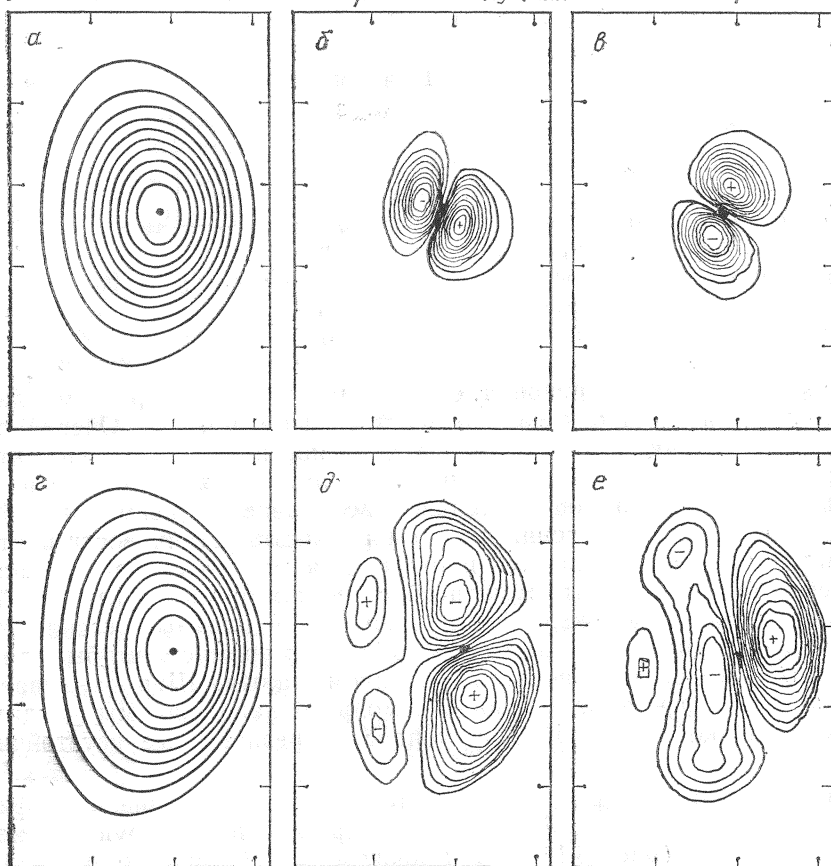
 $\varphi=90^\circ$ 

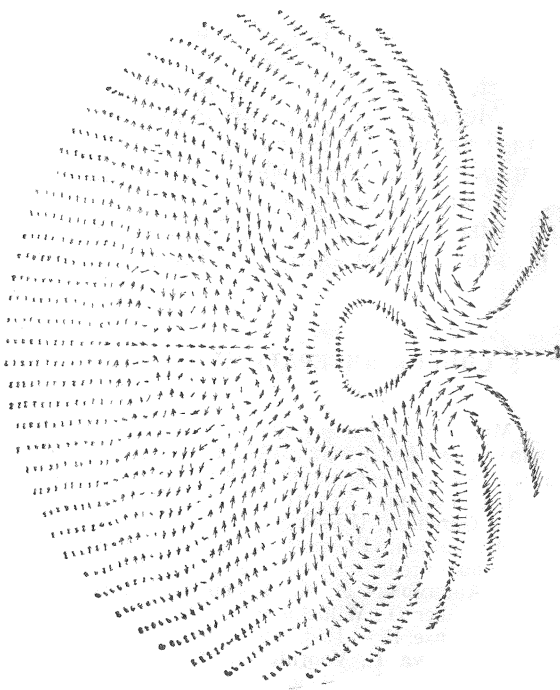
Рис. 8.11. Контурные линии равновесного давления (а, г) и контурные линии возмущенного давления в сечениях, удаленных друг от друга на $\lambda/4$, для неустойчивостей около границы устойчивости:

а-в — относятся к точке с $\beta_{\text{пол}}=1,02$, $q_{\text{ось}}=0,8$ и $\langle\beta\rangle=1,56\%$ на рис. 8.10; г-е — к $\beta_{\text{пол}}=3,6$; $q_{\text{ось}}=1,1$, $\langle\beta\rangle=4,85\%$. Из работы [30]

в полоидальной плоскости, показанных на рис. 8.12 для тора круглого сечения. Собственная функция для большого β состоит из многих полоидальных гармоник, которые всегда заметно усиливают друг друга на внешней стороне тора и почти исчезают на внутренней.

Эти различия между неустойчивостями при низком и высоком β , по-видимому, имеют глубокое влияние на нелинейное развитие неустойчивостей и их последствия. Неустойчивости с низким β при нормальных режимах токамака сравнительно слабые. Как мы увидим в гл. 11, считается, что с наблюдаемыми в токамаке

Рис. 8.12. Картина течения для баллонных мод с $n=3$, $\beta^*=3,0\%$. Из работы [29]



тилообразными колебаниями, которые встряхивают сердцевину плазмы, оставляя ее край незатронутым, связана внутренняя мода $m=1$ с низким β в ее резистивном проявлении. Однако поскольку баллонные моды при высоком β концентрируются вблизи края плазмы, т. е. там, где градиент давления максимален, потенциально они являются намного более опасными. Баллонные моды аналогичны неустойчивости Рэля — Тейлора и, следует ожидать, что они приводят к образованию ячеек Бенарда (см. гл. 10), которые могут сильно увеличить потери плазмы. В настоящее время для проверки этого предела по устойчивости и определения последствий готовится несколько экспериментов на токамаках.

§ 8.4. РЕЗЮМЕ

При увеличении давления плазмы предсказано появление нового класса неустойчивостей, так называемых баллонных мод, которые являются одними из наиболее опасных и ограничивающих МГД-неустойчивостей в токамаках. Термин *баллонные моды* относится к неустойчивостям, которые неоднородны вдоль магнитных силовых линий. Они приводят к выпиранию плазмы там, где градиент давления и кривизна максимальны и направлены примерно в одну сторону. Следовательно, они обычно наиболее

сильны на внешнем обводе тора для плазмы высокого давления в случае круглого сечения или на заострениях при вытянутой плазме. В то время как винтовая мода или критерий устойчивости Мерсье налагают ограничение на q в плазме, как, например, для плазмы круглого сечения при большом аспектном отношении $q \geq 1$ на магнитной оси, баллонные моды налагают ограничение на давление или в его безразмерной форме на параметр β плазмы (8.3.5). Это ограничение на β чувствительно к геометрии плазмы и профилям давления и плотности тока.

§ 8.5. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Много экспериментальных работ по плазме вытянутого сечения опубликовано на конференциях МАГАТЭ и Европейских конференциях, а также на тематических конференциях по импульсной плазме с большим β :

I. Los Alamos Report, LA-3770, 1967.

II. Garching, IPP-Report 1/127, 1972.

III. Calham; Plasma Physics Supplement, Pergamon Press, 1975.

Дополнительными ссылками являются:

1. Арцимович Л. А., Шафранов В. Д. — Письма ЖЭТФ, 1972, т. 15, с. 72.

2. Gruber O., Wilhelm R. — Nucl. Fusion, 1976, v. 16, p. 243—251.

3. Krause H. — Ibid., 1975, v. 15, p. 855—863.

4. Ohkawa T., Voorhies H. G. — Phys. Rev. Lett., 1969, v. 22, p. 1275—1277.

5. Ohkawa T. — Report GA-8528, 1968.

Расчеты устойчивости на модели поверхностного тока содержатся в работах:

6. Freidberg J. P., Haas F. A. — Phys. Fluids, 1974, v. 17, p. 440—446.

7. Marder B. M. — Ibid., p. 447—451; p. 634—639.

8. Freidberg J. P., Grossman W. — Ibid., 1975, v. 18, p. 1494—1506.

9. Freidberg J. P. e. a. — IAEA Tokyo Conf. V. 1, 1975, p. 505.

Влиянию вытянутости на неустойчивости без учета баллонных мод посвящены работы:

10. Laval G., Pellat R., Soule J. S. — Phys. Fluids, 1974, v. 17, p. 835—845.

11. Laval G. — Phys. Rev. Lett., 1975, v. 34, p. 1316—1320.

12. Bateman G., Schneider W., Grossman W. — Nucl. Fusion, 1974, v. 14, p. 669—683.

13. Allen A. W. e. a. — Phys. Rev. Lett., 1977, v. 39, p. 404.

14. Grossman W., Tataronis J. A., Weitzner H. — Phys. Fluids, 1977, v. 20, p. 239—251.

15. Dewar R. L. e. a. — Ibid., 1974, v. 17, p. 930.

16. Chance M. S. e. a. — Nucl. Fusion, 1977, v. 17, p. 65—84.

Существует много статей, посвященных применению критерия Мерсье или достаточного критерия для некруглого поперечного сечения. Например:

17. Соловьев Л. С. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 6. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1972, с. 210.

18. Lortz D., Nuhrenberg J. — Nucl. Fusion, 1973, v. 13, p. 821—827.

19. Peng Y.-K. M. e. a. — Phys. Fluids, 1978, v. 21, p. 467—475.

20. Okamoto M., Wakatani M., Amano T. — Nucl. Fusion, 1975, v. 15, p. 225—236.

21. Harnegger F., Maschke E. K. — Ibid., 1974, v. 14, p. 119—121.

22. Coppi B., Dagazian R., Gajewski R. — Phys. Fluids, 1972, v. 15, p. 2405—2418.

Устойчивости по отношению к осесимметричным модам посвящены работы:

23. Haas F. A., Papaloizou J. C. B. — Nucl. Fusion, 1977, v. 17, p. 721—728.

24. Chu M. S., Miller R. L., Ohkawa T. — Ibid., p. 465—472.

25. Rebhan E., Salat A. — Ibid., p. 251—261.

Концепция токамаков с вторженными потоками изложена в статьях:

26. Clarke J. F., Sigmar D. J. — Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 70—74.

27. Dory R. A., Peng Y.-K. M. — Nucl. Fusion, 1977, v. 17, p. 21—31.

28. Callen J. D., Dory R. A. — Phys Fluids, 1972, v. 15, p. 1523—1528.

Теории баллонных мод в токамаке с диффузными профилями посвящены работы:

29. Todd A. M. M. e. a. — Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 826.

30. Bateman G., Peng Y.-K. M. — Ibid., p. 829—832.

31. Sykes A., Wesson J. A., Cox S. J. — Ibid., v. 39, p. 757—760.

32. Coppi B. — Ibid., p. 939—942.

33. Dobrott D. e. a. — Ibid., p. 943.

34. Connor J. W., Hastie R. J., Taylor J. B. — Ibid., 1978, v. 40, p. 396—399.

Глава 9. НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ

Обычно считают, что все макроскопические неустойчивости пагубны и что МГД-теория должна использоваться только для поиска полностью устойчивых конфигураций. Поскольку при этом представляет интерес информация только о границе устойчивости, теоретические исследования почти целиком были сосредоточены на развитии методов минимизации потенциальной энергии. Вплоть до недавнего времени очень мало исследователей интересовались инкрементами и структурой линейных неустойчивостей.

В настоящее время стало ясно, что для управляемого термоядерного синтеза полностью устойчивая плазма не является заведомо наилучшей. В плазме токамака обычно наблюдаются флуктуации в виде колебаний Мирнова или пилообразных колебаний, как будет подробно описано в гл. 11. По-видимому, лучшие режимы токамака наблюдаются тогда, когда существует баланс между мощностью, которую можно вложить в плазму, и увеличением потерь, связанным с неустойчивостями. Уменьшение мощности до уровня, когда флуктуации нельзя уже зарегистрировать, как на рис. 1.8, приводит к режиму с относительно холодной и неинтересной плазмой. Очевидно, что более важно научиться работать при наличии неустойчивостей, чем устранять их совсем. Поэтому в настоящее время проявляется большой интерес к развитию нелинейной теории, чтобы можно было предсказать, к каким последствиям приводят неустойчивости, если они существуют.

В любом случае возникает вопрос, каково нелинейное развитие неустойчивостей, которые были изучены выше? Насыщаются ли они при конечной амплитуде? Изменяется ли кардинальным образом их структура по сравнению с линейной стадией? Будут ли они разбиваться на более мелкомасштабные структуры? Вынесут ли неустойчивости плазму на стенку? Вот вопросы, которые мы рассмотрим в этой главе.

§ 9.1. НЕЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ

Для изучения нелинейных МГД-неустойчивостей существует по крайней мере пять перекрывающихся методов: численное моделирование, теория бифуркаций, сингулярный метод возмущений, изучение конвективных ячеек и изучение сильно развитой турбулентности. В этом параграфе будет дана краткая история каждого метода, а в следующих двух параграфах будут описаны некоторые наиболее существенные результаты.

Численное моделирование. Первую попытку численного моделирования нелинейной эволюции крупномасштабной неустойчивости сделали в 1958 г. Робертс и Куртис для своей модели извивающегося разряда. Затем в течение 15 лет работ не было, пока Ван Ховен и Кросс [3] не стали изучать нелинейную эволюцию резистивной тиринг-моды (см. гл. 10) как модель солнечных вспышек. Затем в 1974 г. появилось сразу несколько нелинейных численных кодов, предназначенных для достаточно длительного прослеживания эволюции идеальных и резистивных МГД-уравнений, чтобы изучить эффекты крупномасштабных неустойчивостей. К концу 1975 г. в мире было по крайней мере восемь различных исследовательских групп, обладающих кодами, специально созданными для прослеживания нелинейного развития неустойчивостей, и еще больше групп с кодами, разработанными для отыскания новых трехмерных равновесий с использованием алгоритмов, аналогичных временной эволюции.

Брекбилл [4] в Лос-Аламосе весной 1974 г. начал получать нелинейные результаты с помощью довольно сложного кода, являющегося дальнейшим развитием кодов по гидродинамике. Вместе с Барнсом он исследовал плазму вращающегося θ -пинча и модели установки «Сциллак» с ударным нагревом. Было обнаружено, что при этих условиях неустойчивость выносила плазму очень близко к стенке, причем структура неустойчивости существенно не отличалась от ее линейной стадии. Тот же код можно было использовать для изучения динамической эволюции устойчивой плазмы, когда она приближается к равновесию.

Начиная с 1974 г. серия нелинейных кодов была разработана в Институте перспективных исследований в Принстоне под руководством М. Розенблюта. Общей чертой этих кодов является предположение о $\beta=0$, что использовалось при разложении по обратной величине аспектного отношения. В большинстве этих кодов уравнения дополнительно упрощены за счет рассмотрения прямого цилиндрически-симметричного равновесия и предположения о том, что возмущение имеет винтовую симметрию в течение всей нелинейной эволюции. Предположение о винтовой симметрии для какой-либо одной заданной моды правомерно, однако оно исключает изучение взаимодействия нескольких мод с разными шагами винта. Указанные предположения приводят к системе уравнений для несжимаемого течения с фиксированным продольным магнитным полем. Кроме уменьшения числа пере-

менных и уравнений эти предположения позволяют исключить временные масштабы быстрых магнитозвуковых и альфвеновских волн и тем самым сохранить численную устойчивость и точность при существенно более длинных шагах по времени.

Некоторые результаты группы Розенблюта представлены в § 9.2, а их результаты по резистивным неустойчивостям приведены в гл. 10. Штраус [6] распространил этот метод с $\beta=0$ на вытянутые сечения, в которых хорошо развивается внутренняя винтовая мода. Предположение о винтовой симметрии в цилиндре круглого сечения использовали также Н. И. Герлах и Н. М. Зуева [7] при изучении влияния сопротивления на МГД-неустойчивости с конечным β и конечным аспектным отношением. Из-за более высокой точности, которую можно достичь в расчетах с такими укороченными системами уравнений — особенно когда за счет предположения о винтовой симметрии задача сводится к двумерной, — это направление исследований быстро доказало свою плодотворность.

Для изучения неустойчивостей с закрепленной границей Хикс, Вутен и Бейтман в Ок-Ридже разработали простой нелинейный код, который использует явную конечно-разностную схему с перешагиванием на декартовой сетке в цилиндре или торе с прямоугольным сечением. Некоторые результаты будут описаны в § 9.3. Вессон и Сайкс [9] в Калэме добавили в аналогичный код вязкость, сопротивление, омический нагрев и диффузию и смоделировали релаксационные колебания, которые выглядели аналогично пилообразным колебаниям, наблюдаемым в экспериментах на токамаках с помощью мягкого рентгеновского излучения. Ю. Н. Днестровский с соавторами в Москве выдвинули аналогичную версию этого кода и изучали связь мод $m=1$ и $m=2$ в прямом цилиндре при их нелинейной эволюции. Усложненная серия нелинейных кодов с учетом эффектов конечного β , сопротивления, вязкости и т. д. была разработана в Ливерморе под руководством Киллина.

Теория бифуркаций. Основная идея состоит в поиске нового деформированного равновесия в окрестности первоначального для параметров, близких к границе устойчивости. Простой пример бифуркации обсуждался уже в § 4.5. Здесь нас интересует равновесие в прямом цилиндре или осесимметричном торе, которое деформируется в новое винтовое равновесие. Обычно анализ основан на разложении потенциальной энергии или уравнения движения до членов высокого порядка по смещению. Родоначальником такого метода был Фридрихс [10], рассмотревший коротковолновые винтовые неустойчивости с использованием модели поверхностного тока. Аналогичный анализ был распространен на длинноволновые неустойчивости в работе Йе [11]. Резерфорд, Фюрт и Розенблют [12] при исследовании механизма неустойчивости срыва нашли бифуркацию равновесия как для винтовой, так и для тиринг-моды в случае прямого цилиндра с

распределенным током и вакуумной областью. Б. Б. Кадомцев [13] и Б. Б. Кадомцев и О. П. Погуце [14] предложили несколько простых моделей для характерных винтообразных равновесий и равновесий с волокнистой структурой, которые при некоторых условиях появляются в результате винтовых неустойчивостей, как это будет описано в следующем разделе.

Сингулярный метод возмущений. Если говорить о внутренней винтовой моде $m=1$, исследованной Розенблютом, Дагазьяном и Резерфордом [15], или о нелинейной скорости роста тиринг-моды, исследованной Резерфордом [16], то нелинейными членами можно пренебречь всюду, за исключением тонкого пограничного слоя около рациональной поверхности. Нелинейное решение в этом пограничном слое затем сшивается с линейным решением в остальной области.

Конвективные ячейки. Классическим примером неустойчивости, приводящей к стационарным конвективным ячейкам, является возникновение конвекции Бенарда, когда жидкость нагревается снизу. Это явление подробно было описано Чандресекаром [17]. Есть доказательства, что конвективные ячейки дают большой вклад в потери частиц в некоторых плазменных установках с малым широм (см., например, работу Харриса [21] и несколько статей, представленных на Новосибирскую конференцию МАГАТЭ, 1968 г.). Из недавних теоретических работ этому посвящены работы Вобига [18], а также Машке и Париса [19].

Сильно развитая турбулентность. Было очень мало попыток рассмотреть макроскопическое турбулентное состояние, в котором нелинейным образом взаимодействует широкий спектр МГД-мод. Полуэмпирический подход был в общих чертах развит Б. Б. Кадомцевым и О. П. Погуце [22]. Недавно Монтомгери с соавт. [24, 25] применили метод, развитый Крейчнаном [23], к двумерной МГД-модели. В то время как в трехмерной ситуации энергия всегда переходит в коротковолновые масштабы, они нашли, что в двумерной геометрии энергия может переходить как в более длинные, так и в более короткие масштабы. Переход энергии в длинноволновой спектр по прошествии достаточного времени создает вихревые дорожки. Плазма с малым широм в сильном магнитном поле может вести себя как в двумерной ситуации.

§ 9.2. НЕУСТОЙЧИВОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Очень простой иллюстративный пример нелинейного развития винтовой неустойчивости предложил Б. Б. Кадомцев [13]. Рассмотрим модель поверхностного тока для тонкой прямолинейной цилиндрической плазмы, отделенной от стенки вакуумной областью. Пусть в вакуумной области существует полоидальное ($B_\theta = B_{\theta a} a/r$) и продольное ($B_z = B_{z0}$) магнитные поля, а внутри плазмы поля нет. Полоидальный поток между плазмой и стенкой

равен

$$\begin{aligned} \psi_{\text{пол}} &= \int dl \int dr B_{\theta} = \\ &= aLB_{\theta a} \ln(r_{\text{стен}}/a). \end{aligned} \quad (9.2.1)$$

Предположим теперь, что неустойчивость превращает плазму в винт с одним оборотом на длине L . Из-за накручивания шнура на часть продольного поля, как показано на рис. 9.1, происходит увеличение полоидального потока

$$\delta\psi = \pi\xi^2 B_z, \quad (9.2.2)$$

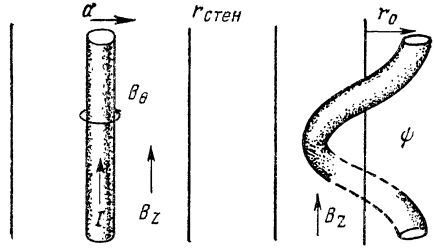


Рис. 9.1. Иллюстрация нелинейного стабилизирующего механизма Кадомцева для моды $m=1$

где ξ — амплитуда винтового возмущения. Поскольку полоидальный поток во время движения должен сохраняться, продольный ток и полоидальное поле должны уменьшиться при увеличении деформации. Новое равновесие достигается, когда продольный ток в плазме уменьшится до нуля, так что останется только первоначально однородное магнитное поле. Радиус ξ , при котором это произойдет, определяется сохранением потока

$$\delta\psi = \psi_{\text{нач}} \Rightarrow \pi\xi^2 B_z = aLB_{\theta a} \ln(r_{\text{стен}}/a). \quad (9.2.3)$$

В отсутствие вязкости или других диссипативных эффектов плазма должна была бы проскочить эту точку, а затем отскочить назад из-за токов отражения в стенке. Если плазму остановить в новом равновесии, то она стремится подойти к стенке, так как нет силы, удерживающей ее неподвижно в однородном поле. Этот простой пример иллюстрирует только роль сохранения потока в нелинейной эволюции. Он не выясняет причину неустойчивости и ее энергетический источник. Даже условие неустойчивости $q_a < 1$ здесь не появляется.

Вопрос 9.2.1. Изменится ли результат, если вакуумную область заменить бессиловой плазмой или средой с бесконечной проводимостью, в которой первоначально нет токов?

Более детальный анализ для плазмы с однородным током в случае большого аспектного отношения провели Резерфорд, Фюрт и Розенблют [12]. Вблизи нижней границы устойчивости по q , когда винтовая неустойчивость почти стабилизирована стенкой

$$m - nq_a < 1 - X, \quad X \equiv (a/r_{\text{стен}})^{2m}, \quad (9.2.4)$$

амплитуда винтового равновесия

$$\left(\frac{\xi_a}{a}\right)^2 \approx \frac{2(1 - X + nq_a - m)}{mX^2 \left(m - 1 + 2m \frac{1 - 2X}{(1 - X)^2} + \frac{1}{\ln(r_{\text{стен}}/a)} \right)}. \quad (9.2.5)$$

К сожалению, вблизи верхней границы по q (критерий Крускала — Шафранова)

$$0 < m - nq_a \quad (9.2.6)$$

амплитуда винтового равновесия очень чувствительна к профилю тока в плазме и для него, по-видимому, нет надежной аналитической оценки.

Розенблют, Монтичелло, Штраус и Уайт [5] выполнили численное исследование винтовых неустойчивостей со свободной границей. Они пользовались описанной в § 9.1 моделью с $\beta=0$, большим аспектным отношением и винтовой симметрией. Они нашли, что при параболическом профиле тока в первоначальном цилиндрическом равновесии мода $m=1$ приводит к большой деформации поверхности плазмы, даже если стенка находится близко к плазме (рис. 9.2). На рис. 9.2 отдельные фигуры показывают сечения винтового равновесного шнура в состоянии с минимальной энергией при разных значениях q на границе плазмы. Для q вблизи верхней границы области неустойчивости (рис. 9.2, *г*) виден намек на образования «пузыря», предсказанного Б. Б. Кадомцевым и О. П. Погуце [14], при котором винтовая трубка вакуумного магнитного поля стремится проникнуть в плазму. Одно из утверждений теории пузырей состоит в том, что в состоянии с минимальной энергией внутрь плазмы захвачена часть вакуумной области. Однако такой процесс сильно подавляется широм.

Вопрос 9.2.2 [14]. Каково изменение магнитной энергии, когда трубка вакуумного поля проникнет в центр плазмы? Предположим, что плазма несжимаема и что в трубке содержится часть полоидального потока. Когда трубка достигает центра плазмы, она образует тонкий прямой цилиндр с потоком $\pi r_0^2 B_{z0}$.

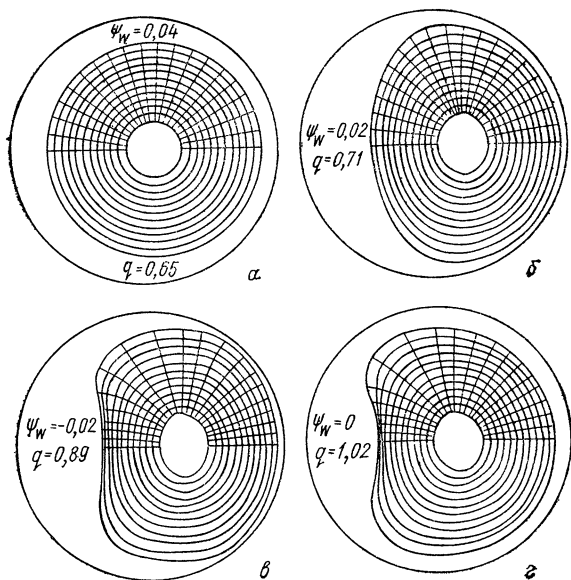


Рис. 9.2. Насыщение моды $m=1$ в цилиндрическом плазменном шнуре с широм [параболический $J_z(r)$] [5]

При уменьшении q (рис. 9.2, б, в) неустойчивость сдвигает плазму ближе к стенке, но винтовая деформация при этом более слабая. Рис. 9.2, а соответствует q на левой границе зоны неустойчивости, когда моду стабилизируют токи отражения в стенке.

На рис. 9.3 показано сечение винтового равновесия, к которому приводит винтовая мода $m=2$.

Здесь с трудом можно увидеть какую-либо деформацию поверхности плазмы. Это хороший пример, когда неустойчивость, которая первоначально казалась опасной из-за своего большого инкремента и широкой пространственной протяженности по сравнению с внутренними перестановочными модами, теперь кажется относительно безвредной.

Из опыта работы с моделями большого β и более коротких длин волн замечено, что если находиться далеко от границы устойчивости, то эти винтовые неустойчивости стремятся выбросить плазму на стенку, где она разбрызгивается подобно жидкости. Пока еще неизвестно, какие условия надо наложить на β , длину волны и вязкость, чтобы получить небольшие деформации, показанные на рис. 9.2 и 9.3.

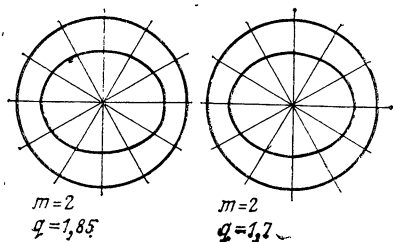


Рис. 9.3. Насыщение моды $m=2$ в цилиндрическом шнуре с параболическим током [5]

§ 9.3. НЕУСТОЙЧИВОСТИ С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ

Внутренние неустойчивости, или неустойчивости с закрепленной границей, характеризуются вращающимися навстречу другу другу вихревыми ячейками, которые вдоль шнура вьются по винту. Например, неустойчивость при $m=1$ состоит из двух вихревых ячеек, которые создают примерно однородный поток вблизи центра плазмы и более узкую область обратного потока около рациональной поверхности $q=1$. Для неустойчивости с $m \geq 2$ существует кольцо из $2m$ вихревых ячеек с центрами, расположенными вблизи рациональной поверхности $q=m$. Возмущение магнитного поля также всегда состоит из $2m$ вихревых ячеек, соответствующих токовым нитям, которые находятся в противофазе с вихрями скорости. При малом аспектном отношении есть также возмущение продольного магнитного поля, противоположное каждой нити возмущения тока. Эти свойства неустойчивостей в прямом цилиндре были описаны в § 6.5. В тороидальной геометрии, а также при некруглом сечении структуры становятся более запутанными.

Вопрос 9.3.1. Почему основные потоки протекают в сечении плазмы, а не идут вдоль плазменного шнура?

Нелинейная эволюция каждой из этих неустойчивостей происходит в основном в виде конвекции около вихревых ячеек. Поле скоростей, установившееся на линейной стадии неустойчивости,

на нелинейной стадии продолжает нарастать по амплитуде достаточно долго без изменения структуры течения. После того как произошел вынос давления, плотности, магнитного поля и плотности тока из центральной области и образовалось кольцо горячей плазмы, окружающей сравнительно холодную плазму, пришедшую с края, амплитуда поля скоростей насыщается на уровне нескольких десятых альфвеновской скорости, и вихревая структура распадается. Этот процесс, вплоть до момента насыщения, показан на рис. 9.4—9.6, представляющих численные расчеты нелинейных неустойчивостей в коротком цилиндрическом плазменном шнуре, сделанные Бейтманом, Хиксом и Вутеном [8].

Отметим, что последствия неустойчивости сильно зависят от ее пространственной структуры. Например, локализованная неустойчивость $m=1$, показанная на рис. 9.4, когда значение q опускается ниже единицы только вблизи центра плазмы, приводит к сильному перемешиванию плазмы около центра, оставляя периферию плазмы почти незатронутой. В гл. 10 мы увидим, что в завершении этого процесса перемешивания существенную роль играет электрическое сопротивление, позволяющее магнитным силовым линиям перезамыкаться и перераспределяться, после того как они изогнутся за счет конвекции. Наиболее сильная неустойчивость $m=1$, когда $q < 1$ почти во всей плазме, приводит к выносу плазмы на стенку (рис. 9.5). Последующие кадры этого процесса демонстрируют расплескивание и хаотизацию движения.

Каждая из этих неустойчивостей создает области парамагнетизма и уменьшенного полоидального поля около центра плазмы, окруженного кольцом более слабого тороидального поля и увеличенного полоидального поля. Сайкс и Вессон [9] в численных расчетах наблюдали обращение продольного поля на краю плазмы, когда неустойчивость была достаточно сильной.

Вопрос 9.3.2. Во время нелинейной эволюции неустойчивости $m=1$ с закрепленной границей полное магнитное поле сохраняет винтовую структуру с геометрической осью, проходящей через центр плазмы. Как может конвекция с $m=1$, деформирующая винтовое поле, оставить неизменной винтовую симметрию?

Численные результаты, демонстрирующие наличие крупномасштабной конвекции, происходящей в практически неподвижных вихревых ячейках, были получены для разных параметров плазмы. Н. И. Герлах и Н. М. Зуева [7] проследили конвекцию отдельной МГД-моды $m=2$ с учетом электрического сопротивления в конвективном движении и наблюдали образование и перемешивание сложной нитевидной структуры. Бейтман, Хикс и Вутен [8], а также Штраусс [6] исследовали конвекцию в цилиндрической плазме с вытянутым сечением. Штраусс использовал уравнения с низким β , выведенные Розенблютом*, и продемонстрировал

* Впервые такие уравнения были выведены Б. Б. Кадомцевым и О. П. Погуце. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1973, т. 65, с. 575. — *Примеч. ред.*

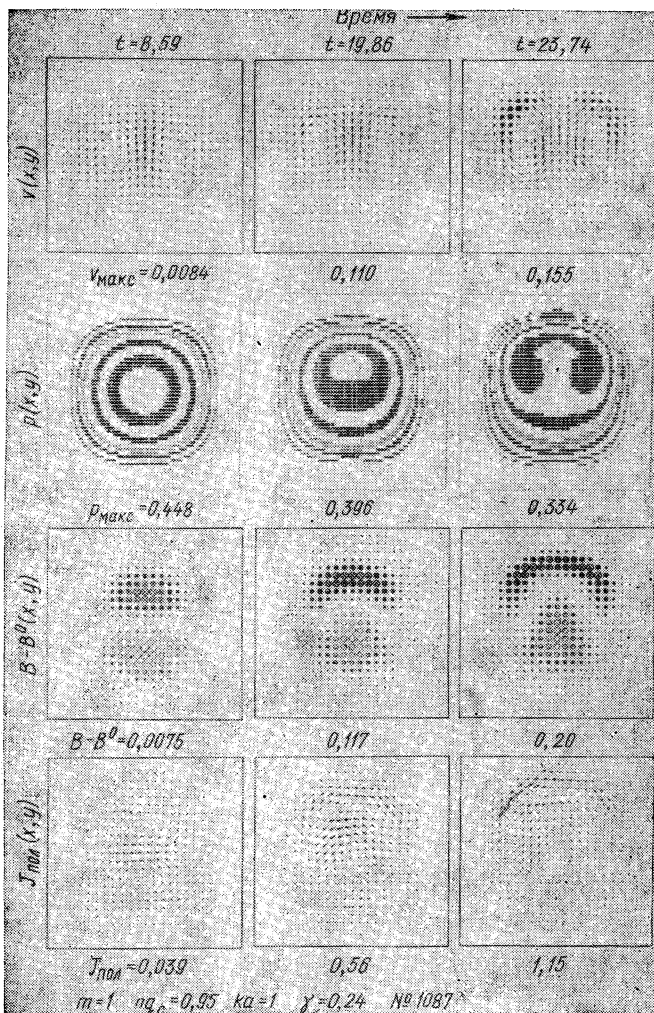


Рис. 9.4. Нелинейная эволюция скорости, давления, возмущения магнитного поля и полоидального тока для внутренней моды $m=1$ вблизи границы устойчивости. Геометрия цилиндрическая $r'(\psi) \sim \psi$ [8]

совпадение конвективных течений, полученных в кодах с лагранжевой и с эйлеровой сетками. Изучение тороидальной геометрии показало в основном те же процессы.

В случае малого β , большого аспектного отношения и сильного шира существует аналитическая модель для идеальной моды $m=1$ в круглом цилиндре, разработанная Розенблютом, Да-

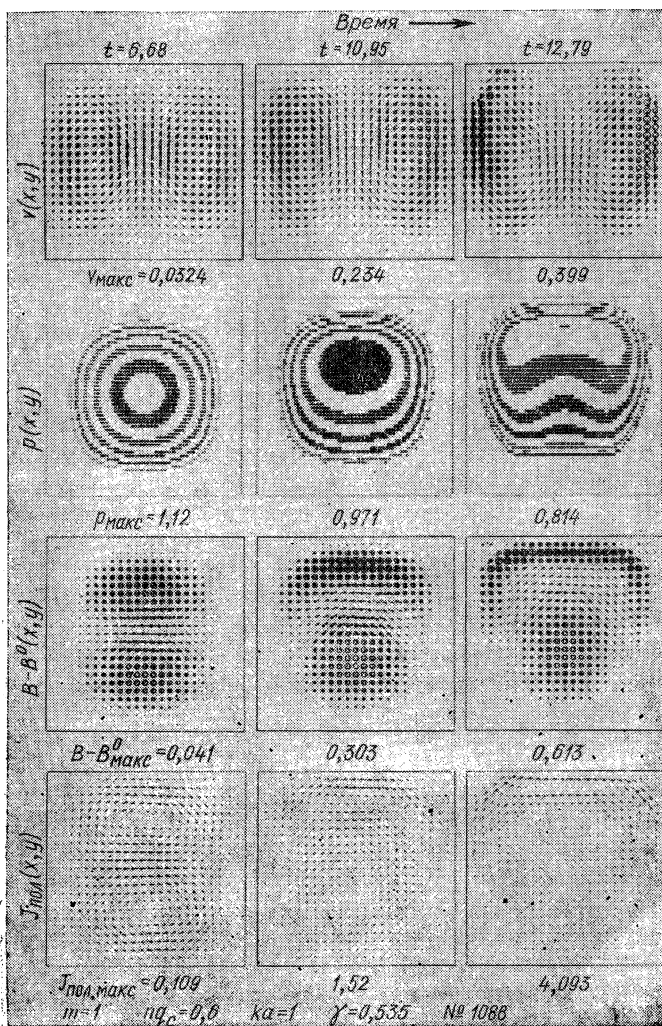


Рис. 9.5. Нелинейная эволюция внутренней неустойчивости $m=1$ вдали от границы устойчивости [8]

газьяном и Резерфордом [15]. Они нашли хорошее аналитическое приближение решения нелинейных уравнений в тонком пограничном слое около рациональной поверхности $q=1$. Они сшили это решение с линейным решением в остальной области, используя процедуру, аналогичную описанной в § 6.5. Была найдена амплитуда насыщения для смещения центра плазменного шнура

$$\xi_a = \frac{13}{r_s^3 [(k \cdot B)'_r]_s^2} \int dr (-4\pi g), \quad (9.3.1)$$

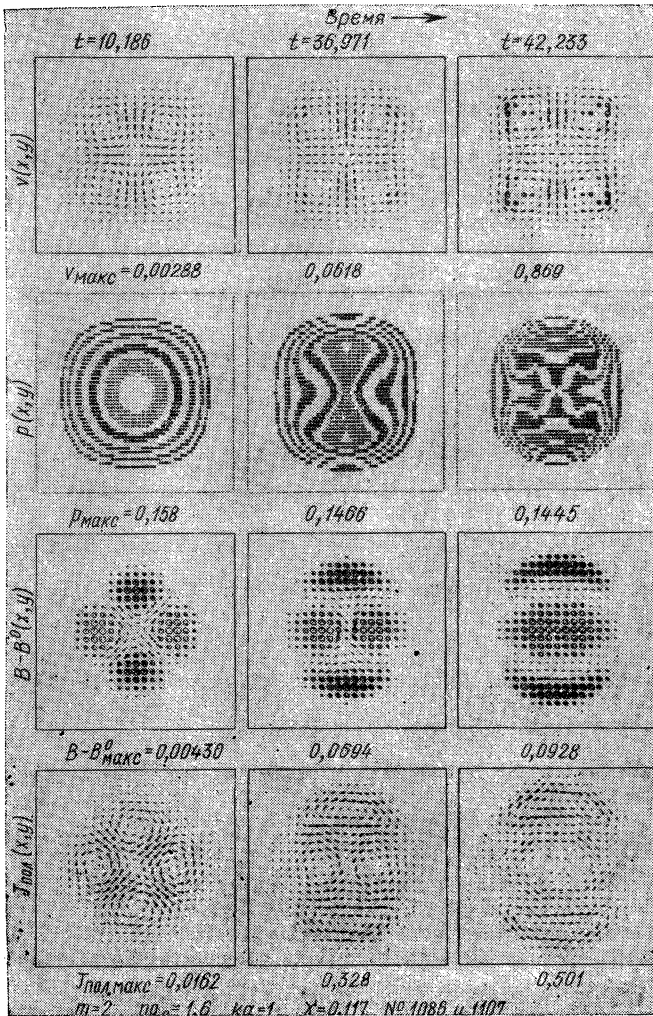


Рис. 9.6. Нелинейная эволюция внутренней неустойчивости $m=2$ [8]

где r_s — радиус поверхности с $q=1$; дестабилизирующий член g определяется выражением (6.4.7), а $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = B_\theta(r)/r - kB_z(r)$. С помощью численных методов трудно смоделировать условия, при которых применимо это аналитическое решение.

Вопрос 9.3.3. Каково предельное смещение для моды $m=1$ в равновесии с параболическим профилем тока $J_z = J_{z0}(1-r^2/a^2)$ при r_s , удаленном от центра? Когда смещение становится меньше r_s ?

§ 9.4. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Обзор последних МГД-расчетов можно найти в обзорной статье:

1. **Wesson J. A.** *Computer Physics Communications*, 1976, v. 12, p. 53—65.

Расчеты Робертса и Куртиса представлены в докладе:

2. **Thompson W. B. e. a.** *Geneva Conf.*, 1958, v. 32, p. 65—71.

В тексте используются также ссылки на следующие работы по численному моделированию:

3. **Van Hoven G., Cross M. A.** — *Phys. Rev.*, 1973, v. A7, p. 1347—1352.

4. **Brackbill J. U.** — *Methods in Computational Physics*, 1976, v. 16, p. 1—41.

5. **Rosenbluth M. N. e. a.** — *Phys. Fluids*, 1976, v. 19, p. 1987—1996.

6. **Strauss H. R.** — *Ibid.*, p. 134—140.

7. Герлах Н. И., Зуева Н. М. и др. Препринты ИПМ № 89, 91, 1974; 74, 95, 96, 111, 1975.

8. **Bateman G., Hicks H. R., Wooten J. W.** — ORNL/TM-5796, 1977: *Proceedings of the 3rd Topical Conference on Pulsed High Beta Plasmas*, Calham, England, 1975.

9. **Sykes A., Wesson J. A.** — *Phys. Rev. Lett.*, 1976, v. 37, p. 140—144.

О теории бифуркации см.:

10. **Friedrichs K. O.** — *Rev. Mod. Phys.*, 1960, v. 32, p. 889—897.

11. **Yeh T.** — *Phys. Fluids*, 1973, v. 16, p. 516—528.

12. **Rutherford P. H., Furth H. P., Rosenbluth M. N.** — IAEA Madison Conf., 1971, v. 2, p. 553—570.

13. **Кадомцев Б. Б.** — В кн.: *Вопросы теории плазмы. Вып. 2. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1963, с. 132.*

14. **Кадомцев Б. Б., Погуце О. П.** — В кн.: *Материалы 6-й Европейской конф. по управляемому термоядерному синтезу и физике плазмы. Т. 1. М., 1973, с. 59—62; Журн. эксперим. и теорет. физ., 1973, т. 65, с. 575.*

Сингулярному методу возмущений посвящены работы:

15. **Rosenbluth M. N., Dagazian R. Y., Rutherford P. H.** — *Phys. Fluids*, 1973, v. 16, p. 1894—1902.

16. **Rutherford P. H.** — *Ibid.*, p. 1903—1908.

О конвективных ячейках см.:

17. **Chandrasekhar S.** *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford, Clarendon Press, 1961.

18. **Wobig H.** — *Plasma Physics*, 1972, v. 14, p. 403—416.

19. **Maschke E. K., Paris R. B.** — Report EUR-CEA-FC-721, 1974; IAEA Токуо Conf., 1974, v. 1, p. 531—539.

20. **Dagazian R. Y., Paris R. B.** — *Phys. Fluids*, 1977, v. 20, p. 917—927.

21. **Harries W. L.** — *Ibid.*, 1970, v. 13, p. 1751—1761.

Теории сильной турбулентности посвящены работы:

2. **Кадомцев Б. Б., Погуце О. П.** — В кн.: *Вопросы теории плазмы. Вып. 5. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1967, с. 209.*

23. **Kraichnan R. H.** — *Phys. Fluids*, 1967, v. 10, p. 1417—1423.

24. **Fyfe D., Montgomery D.** — *J. Plasma Phys.*, 1967, v. 16, p. 181—191.

25. **Fyfe D., Montgomery D., Joyce G.** — *Ibid.*, 1977, v. 17, p. 317—335, 369—398.

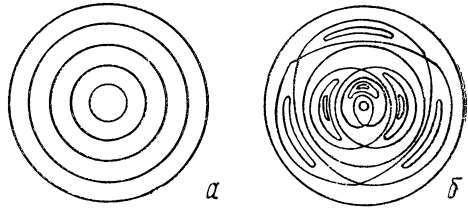
Дополнительные работы по нелинейной эволюции тиринг-мод будут обсуждены в гл. 10.

Глава 10. РЕЗИСТИВНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

До сих пор мы рассматривали неустойчивости в приближении идеальной магнитной гидродинамики. Казалось бы, добавление в идеальную модель сопротивления, вязкости или теплопроводности должно было бы только уменьшить инкременты неустойчивостей, так как конечная проводимость приводит к затуханию

Рис. 10.1. Схема сечения:

а — простых вложенных магнитных поверхностей; *б* — магнитных поверхностей с островной структурой $m=1, 2, 3$



электрических токов, вязкость демпфирует любые течения с проскальзыванием, а теплопроводность уменьшает градиенты температуры, с которыми связан источник свободной энергии. Однако следует понимать, что добавление диссипации может вызывать новые неустойчивости из-за устранения ограничений, связанных с идеальностью модели, и тем самым для плазмы становятся доступными состояния с более низкой потенциальной энергией. Устранение ограничений может также ускорить нарастание уже существовавших неустойчивостей. Основным предметом этой главы будет новый тип неустойчивости, так называемой резистивной тиринг-моды, которая появляется, когда в уравнении идеальной магнитной гидродинамики добавляется небольшое электрическое сопротивление.

Добавление сопротивления позволяет магнитным силовым линиям рваться и перезамыкаться, так что они уже перестают быть вмороженными в жидкость (см. § 2.2). Это оказывает сильное влияние на МГД-модель. При конечной проводимости магнитное поле стремится разбиться на множество тонких нитей, называемых магнитными островами, которые пронизывают весь объем плазмы. Так как тепло вдоль силовых линий распространяется быстро, одним из непосредственных эффектов такой островной структуры является увеличение переносов поперек плазмы. Концепция магнитных островов будет разобрана в следующем разделе.

Инкремент резистивных неустойчивостей определяется скоростью, с которой магнитные силовые линии могут разрываться. Такие неустойчивости напоминают процесс просачивания через пористую перегородку под действием вынуждающих сил и инерционных эффектов. Важное свойство этих неустойчивостей состоит в том, что силовые линии могут разрываться только в тонком пограничном слое внутри плазмы. Поскольку диссипация определяется диффузионным уравнением, характерное время такого процесса просачивания определяется квадратом ширины пограничного слоя, деленным на коэффициент диффузии. Чтобы учесть эффекты диссипации, обычно добавляют к уравнениям идеальной магнитной гидродинамики слагаемые с высшими пространственными производными, и это естественно приводит к применению сингулярного метода возмущений для пограничных слоев. Если бы ширина пограничного слоя была сравнима с радиусом плаз-

мы, то получающаяся в результате диффузия магнитного поля происходила бы существенно медленнее большинства МГД-неустойчивостей. Если пограничный слой был бы слишком тонкий, то инкремент ограничивался бы инерционными эффектами. Оказывается, что когда все эффекты сбалансированы, то резистивные неустойчивости нарастают за время, много большее пролетного альфвеновского времени, но значительно быстрее типичного диффузионного времени. В § 10.2 сделана простая оценка толщины пограничного слоя и инкремента тиринг-моды, которая стремится разбить плазму на магнитные острова. В том же параграфе будет описано нелинейное развитие магнитных островов с $m \geq 2$.

Резистивная винтовая неустойчивость моды $m=1$, которая является особым случаем тиринг-моды, рассмотрена в § 10.3. Считается, что эта мода вызывает пилообразные колебания, наблюдаемые в излучении мягкого рентгеновского излучения из токамаков. Дан также обзор численных исследований ее нелинейного развития

В § 10.4 рассмотрена резистивная перестановочная мода, вызываемая обращенным градиентом давления в искривленном магнитном поле, которая еще называется g -модой, так как может возбуждаться обращенным градиентом плотности в гравитационном поле. В конце § 10.4 исследован критерий устойчивости, выведенный Глассером, Грином, Джонсоном [31], который справедлив как для тиринг-, так и для перестановочных мод в тороидальной геометрии.

В этой главе не ставится цель дать полный обзор литературы. Вместо этого рассмотрены простейшие возможные оценки и выкладки, чтобы прояснить основную физику резистивных неустойчивостей. При чтении статей в этой области у многих возникают трудности, частично связанные с используемыми обозначениями, частично из-за того, что даже в простейшей геометрии приходится использовать систему дифференциальных уравнений, по крайней мере, четвертого порядка, а частично из-за того, что даже для получения оценок по порядку величины нужно одновременно сбалансировать несколько эффектов, чтобы сделать приближения согласованными друг с другом. В этой главе обозначения соответствуют остальной части книги, предположения, которые делаются, выделяются, а выкладки проводятся по возможности с минимальным количеством алгебры.

§ 10.1. МАГНИТНЫЕ ОСТРОВА

До сих пор мы рассматривали частный случай МГД-равновесий, образованных из вложенных магнитных поверхностей, окружающих одну магнитную ось, как показано на рис. 10.1, *a*. Теперь рассмотрим более широкий класс конфигураций магнитного поля, которые обладают винтовыми структурами с магнитными островами, расположенными на некоторых рациональных

поверхностях, как показано на рис 10.1, б. Магнитный остров — это трубка плазмы со своей собственной системой вложенных магнитных поверхностей, окружающих собственную местную магнитную ось. Каждый остров винтообразно прокручивается вокруг тора, следуя вдоль замкнутой силовой линии, которая является магнитной осью. Вся структура каждого острова замыкается сама на себя после одного или нескольких обходов вокруг тора, в зависимости от числа обходов магнитной оси.

Магнитные острова можно получить, если следовать за какой-то силовой линией в пределах острова в течение многих ее обходов вокруг тора, пока не станет ясной поверхность, которую покрывает эта силовая линия. Обычно форму сечения острова определяют с помощью интерполяции кривой по точкам, в которых силовая линия пересекает сечение тора. Для аналитических исследований, однако, форму магнитных островов легче определить с помощью функции винтового потока, которая будет получена ниже.

В качестве первого шага рассмотрим цилиндрическую или тороидальную конфигурацию магнитного поля с простыми вложенными магнитными поверхностями и конечным широм $[q(\psi) — \text{неоднородно}]$. Рассмотрим в этой конфигурации рациональную поверхность с $q = m/n$. Составим теперь другое магнитное поле с теми же самыми магнитными поверхностями, но нулевым широм, так что всюду внутри плазмы $q = m/n$. Вычтем это искусственное магнитное поле с нулевым широм из первоначального магнитного поля плазмы и определим

$$\mathbf{V}_*(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{V}(\mathbf{x}) - \mathbf{V}_{q=m/n}(\mathbf{x}). \quad (10.1.1)$$

В круглом цилиндре, например, поле

$$\mathbf{V}_* = \mathbf{V} - \frac{r}{r_s} \mathbf{B}_\theta(r_s) \hat{\theta} - B_z(r_s) \hat{z}, \quad (10.1.2)$$

где r_s — радиус резонансной поверхности, на которой $q = 2\pi r_s \times | \times B_z(r_s) / LB_\theta(r_s) |$, а L — длина рассматриваемого цилиндра. Полоидальная компонента этого поля \mathbf{V}_* меняет знак при переходе через резонансную поверхность и равна нулю на этой поверхности. Следует помнить, что в конфигурациях с кривым магнитным полем полю нулевого шира соответствует определенная плотность тока (для рассмотренного здесь случая круглого цилиндра — однородный ток), которую необходимо вычитать из первоначальной плотности тока при вычислении \mathbf{V}_* .

Чтобы сделать наглядным образование магнитных островов, представим, что цилиндрическая или тороидальная плазма разрезана и развернута в плоский слой, как показано на рис. 10.2, а — в. Этот процесс эквивалентен переходу от декартовых координат к системе натуральных координат, в которых силовые линии, подобно координатам Хадамы, прямые, как это обсуждалось в § 7.1. Преобразование $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}_*$ при этом эквивалентно изменению нашего угла зрения так, что мы смотрим вдоль сило-

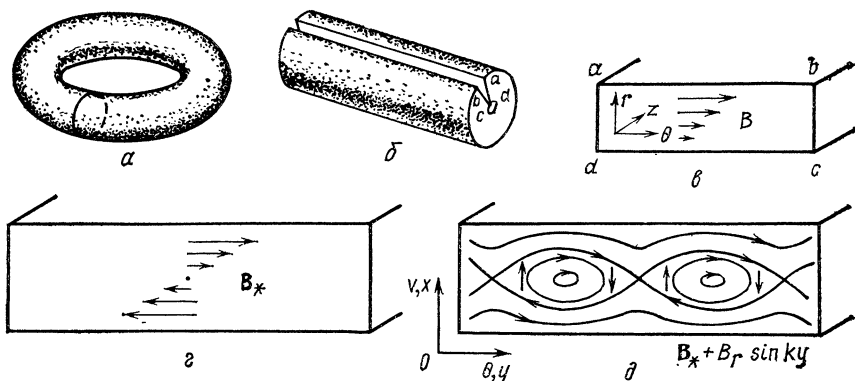


Рис. 10.2. Схема образования магнитных островов. Тороидальная плазма разрезана и развернута. Далее сделан переход к полю B_* и наложено возмущение радиального магнитного поля

вых линий, идущих вдоль резонансной поверхности, как показано на рис. 10.2, г. При такой ориентации полоидальная компонента B_* над резонансной поверхностью направлена слева направо, а под ней справа налево.

Пусть теперь существует малое возмущение радиального магнитного поля с синусоидальной зависимостью от полоидального угла θ , как показано на рис. 10.2, д. В области, где это радиальное поле положительно, силовая линия, находящаяся немного ниже резонансной поверхности, будет двигаться через резонансную поверхность туда, где полоидальная компонента B_* положительна. В этой области силовая линия будет двигаться направо, пока не достигнет области, где радиальное поле отрицательно. Это заставит силовую линию пройти обратно вниз через резонансную поверхность, и там она будет двигаться налево, пока опять не достигнет области, где радиальное поле положительно. Эти циклические орбиты силовых линий около резонансной поверхности образуют магнитные острова, показанные на рис. 10.2, д. Далеко над резонансной поверхностью силовые линии продолжают двигаться слева направо, принимая под влиянием радиального поля волнистый вид, но нигде не оставаясь достаточно долго в области, где радиальное поле имеет один и тот же знак, и тем самым не пересекают резонансную поверхность. Поэтому последняя замкнутая магнитная поверхность образует сепаратрису между замкнутыми поверхностями островов и разомкнутыми поверхностями, расположенными над островами и под ними. Все траектории магнитного поля, показанные на рис. 10.2, д, представляют собой, естественно, проекции силовых линий на плоскость сечения. Реальные силовые линии в общем случае имеют компоненту, перпендикулярную этой плоскости.

Для того чтобы увидеть, почему для образования острова или изменения его во времени требуется наличие сопротивления,

представим себе контур, который идет вдоль тора по силовой линии в центре острова и возвращается по силовой линии в соседней x -точке. Так как рациональная поверхность, содержащая эти силовые линии, замыкается сама на себя после обхода вокруг тора, связывающие отрезки контура можно исключить из рассмотрения. Чтобы остров мог изменяться во времени, должно меняться во времени радиальное магнитное поле на резонансной поверхности. Согласно закону Фарадея, чтобы это произошло, должно быть электрическое поле вдоль контура. Однако контур всюду параллелен магнитному полю кроме частей, которые можно исключить. В модели идеальной магнитной гидродинамики, где $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, электрическое поле вдоль магнитной силовой линии равно нулю. Однако при конечной проводимости продольное электрическое поле просто приводит к появлению токов, текущих вдоль магнитного острова.

При заданных значениях поля \mathbf{B}_* и возмущения радиального магнитного поля легко получить ширину магнитного острова. Рассмотрим сначала случай геометрии плоского слоя, где x соответствует координате вдоль малого радиуса тора, а y — пологидальному углу. Пусть резонансная поверхность находится при $x=0$. Разложим B_* в окрестности этой поверхности:

$$B_{*y}(x) = B'_{*y} x + \dots \quad (10.1.3)$$

Рассмотрим только одну гармонику возмущения магнитного поля

$$B_x^1(x, y) = B_x^1 \sin k_y y. \quad (10.1.4)$$

Полное магнитное поле можно описать функцией потока, наличие которой вытекает из равенства $\nabla \mathbf{B} = 0$:

$$B_x = -\partial\psi/\partial y, \quad B_y = \partial\psi/\partial x; \quad (10.1.5)$$

$$\psi = \psi_0 + \frac{1}{2} B'_{*y} x^2 + \dots + (B_x^1/k_y) \cos k_y y. \quad (10.1.6)$$

При вычислении тока необходимо учитывать, что компонента B_{*y} так же имеет возмущение, как и B_{*x} .

Линии уровня этой функции потока аналогичны рис. 10.2, δ . На линии $x=0$ функция потока имеет минимум в x -точке сепаратрисы при $k_y y = \pi/2$:

$$\psi_s = \psi_0 - B_x^1/k_y. \quad (10.1.7)$$

Пусть W — максимальная ширина сепаратрисы. Сепаратриса имеет наибольшую ширину в точке ($x = \pm W/2$, $k_y y = \pi/2$) вдоль вертикальной линии, проходящей при $x=0$ через O точку магнитного острова

$$\psi_s = \psi_0 + \frac{1}{2} B'_{*y} \left(\frac{W}{2}\right)^2 + \dots + B_x^1/k_y. \quad (10.1.8)$$

Исключая $\psi_s - \psi_0$ из (10.1.7) и (10.1.8), получаем выражение для ширины острова в плоской геометрии

$$W = 4(B_x^1/k_y B_{*y}')^{1/2}. \quad (10.1.9)$$

Этот вывод легко распространить на любую осесимметричную тороидальную конфигурацию. Выберем в качестве координат конфигурации V, θ, φ , где V — объем каждой магнитной поверхности; θ — какой-либо полоидальный угол вокруг магнитных поверхностей, а φ — тороидальный угол. Поле \mathbf{B}_* , определенное выражением (10.1.1) для системы с простыми вложенными магнитными поверхностями, можно описать с помощью функции винтового потока

$$\mathbf{B}_* = \nabla\psi_* \times \nabla\varphi + B_{*\varphi} \hat{\varphi}. \quad (10.1.10)$$

Рассмотрим теперь одну гармонику возмущения радиального поля, которое можно включить в функцию потока

$$\psi = \psi_*(V) + \psi_r \cos(m\theta - n\varphi). \quad (10.1.11)$$

Разложим ψ_* в ряд в окрестности резонансной поверхности $V = V_0$, на которой $B_* = 0$:

$$\psi = \psi_{*0} + \frac{1}{2} \ddot{\psi}_{*0}(V_0)(V - V_0)^2 + \dots + \psi_r \cos(m\theta - n\varphi). \quad (10.1.12)$$

На основе изложенного выше ширину магнитного острова можно представить как

$$|V_s - V_0| = 2(\psi_r / \ddot{\psi}_{*0})^{1/2}. \quad (10.1.13)$$

Здесь V_s надо интерпретировать как объем невозмущенной магнитной поверхности, проходящей через сепаратрису в точке ее максимальной ширины. Для частного случая круглого цилиндра получаем

$$\begin{aligned} V_s - V_0 &= \pi L (r_s - r_0)^2 \simeq \frac{W}{2} \pi L 2r_s, \\ B_{*0} \hat{\theta} + B_r \hat{r} &= 4\pi^2 r \dot{\psi}_{*0} \hat{\theta} + \dots + \frac{2\pi m}{rL} \psi_r \sin(m\theta - n\varphi) \hat{r}; \\ W &\simeq 4r \left(\frac{B_r^1}{mB_\theta} \left| \frac{q}{rq'(r)} \right| \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (10.1.14)$$

где r_s — радиус резонансной поверхности; m — число островов в малом сечении цилиндра. Для более широких островов необходимо принимать во внимание радиальную зависимость B_r^1 и ширину на ширине острова.

Вопрос 10.1.1 [4]. Предположим, что задано много гармоник возмущения радиального поля, соответствующих нескольким резонансным поверхностям внутри плазмы. Когда больше возможностей для перекрытия островов — при малом или при большом шире? Считается, что перекрытие островов усиливает процессы переноса поперек плазмы.

Вопрос 10.1.2. Каково возмущение плотности тока внутри магнитного острова? Возможно ли образование островов в вакуумном магнитном поле?

Вопрос 10.1.3. Сколько раз внутренняя силовая линия магнитного острова должна обойти вокруг тора, прежде чем она продвинется с внутренней стороны острова на внешнюю? Какова величина q относительно собственной магнитной оси острова?

Вопрос 10.1.4. Все ли внутренние силовые линии магнитного острова имеют то же значение q относительно главной магнитной оси тора? Если так, то рационально ли это значение q ?

Вопрос 10.1.5. Какая конфигурация обладает меньшей энергией магнитного поля — слой без островов, как на рис. 10.2, $г$, или слой с островами, как на рис. 10.2, $д$? Предположите, что B_x^1 уменьшается при удалении от $x=0$ и обращается в нуль при $x=\psi$. Предположите также, что возмущение полоидального поля B_y^1 таково, что поток между центром острова и стенкой $x=\psi$ фиксирован.

§ 10.2. НАРАСТАНИЕ РЕЗИСТИВНОЙ ТИРИНГ-МОДЫ

Неустойчивость *тиринг-моды* — это проявление тенденции плазмы разорваться на магнитные острова, чтобы уменьшить магнитную энергию в областях за магнитными островами. При росте островов магнитные поверхности как бы засасываются из областей снизу и сверху острова, сближаются в x -точке, а затем разрываются и образуют замкнутые поверхности внутри островов. Структура возмущения радиального магнитного поля, которое ответственно за образование островов, должна определяться из решения задачи на собственные значения для уравнений идеальной магнитной гидродинамики в областях вне островов. Все остальное происходит в тонком пограничном слое, окружающем острова. Пограничный слой — это область, где рост ширины острова определяется балансом между вынуждающими силами, с одной стороны, и диффузией поля и инерционными эффектами, с другой.

В этом параграфе дан очень простой вывод инкремента резистивной тиринг-моды в геометрии плоского слоя. Если рассматривать слой как аппроксимацию цилиндра или тора, как показано на рис. 10.2, $а$ — $в$, то этот вывод применим для тиринг-мод с $m \geq 2$. Мода $m=1$ является выделенной и будет рассмотрена в § 10.3. Для мод с $m \geq 2$ будет показано, что рост остается экспоненциальным только до тех пор, пока ширина острова много меньше толщины пограничного слоя. После того как ширина острова становится сравнимой с толщиной пограничного слоя, она из-за нелинейных эффектов начинает расти как линейная функция времени. И, наконец, в зависимости от профиля проводимости ширина острова насыщается на уровне, сравнимом с шириной плазмы.

Для оценки инкремента линейной тиринг-моды рассмотрим конфигурацию плоского слоя и упрощенную систему резистивных МГД-уравнений. Равновесие характеризуется полоидальным полем B_* , которое определяется выражением (10.1.1), как описано в предыдущем разделе. Как и раньше, $B_* = 0$ при $x=0$, где

x соответствует радиальной координате, перпендикулярной к равновесным магнитным поверхностям.

Нам будет нужна только радиальная компонента закона Фарадея

$$\frac{\partial}{\partial t} B_x^1 = - \frac{\partial}{\partial y} E_z^1. \quad (10.2.1)$$

Производная по z во всех уравнениях исчезает, так как все величины предполагаются однородными вдоль оси магнитных островов. Электрическое поле в направлении z равно

$$E_z^1 = - v_x^1 B_* + \eta^0 J_z^1, \quad (10.2.2)$$

где η^0 — удельное сопротивление, предполагаемое здесь однородным (так или иначе оно будет важно только в тонком пограничном слое). В принятой упрощенной модели будет рассмотрено только одно слагаемое, связанное с вынуждающей силой,

$$\rho^0 \frac{\partial}{\partial t} v_x^1 = - J_z^1 B_*. \quad (10.2.3)$$

а все движения предполагаются несжимаемыми:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^1 = 0. \quad (10.2.4)$$

Вопрос 10.2.1. Совместимы ли уравнения (10.2.4) и (10.2.3)?

Наконец, будем предполагать, что скорости и возмущения магнитного поля вдоль оси островов равны нулю:

$$v_z^1 = 0, \quad B_z^1 = 0. \quad (10.2.5)$$

При более детальном анализе оказывается, что большая часть предположений является хорошим приближением. Здесь же они рассматриваются в качестве упрощенной модели.

Пусть возмущенные величины B_x^1 и v_y^1 меняются как $\sin ky \exp(\gamma t)$ в то время как E_z^1 , J_z^1 , v_x^1 , B_y^1 пропорциональны $\cos ky \exp(\gamma t)$, как показано на рис. 10.3. Из $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x} B_x^1 = k B_y^1 \quad (10.2.6)$$

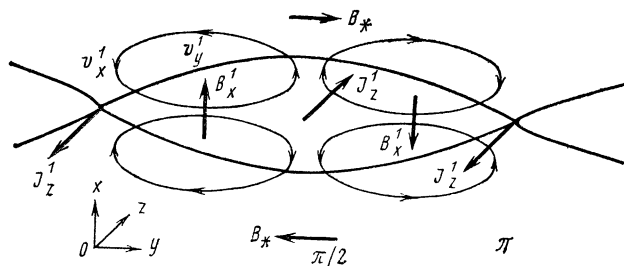


Рис. 10.3. Магнитное поле, плотность продольного тока, картина течения в тиринг-модуле и сепаратриса образовавшегося острова

$$J_z^1 = \frac{\partial B_y^1}{\partial x} - \frac{\partial B_x^1}{\partial y} = \frac{1}{k} \frac{\partial^2 B_x^1}{\partial x^2} - k B_x^1. \quad (10.2.7)$$

Из (10.2.1), (10.2.2) и (10.2.7) имеем

$$\frac{\partial B_x^1}{\partial t} = v_x^1 k B_* - \eta^0 \left(\frac{\partial^2 B_x^1}{\partial x^2} - k^2 B_x^1 \right). \quad (10.2.8)$$

Если сопротивление η^0 достаточно мало, то им можно пренебречь всюду, за исключением области около $x=0$, где B_* исчезает. При $x=0$ у дифференциального уравнения есть сингулярность, и конечный член $\partial B_x^1 / \partial t$ должен быть скомпенсирован большой величиной $\partial^2 B_x^1 / \partial x^2$, умноженной на малую величину η^0 .

Основное упрощение в этих расчетах резистивной неустойчивости состоит в том, что величины $\partial^2 B_x^1 / \partial x^2$, J_z^1 велики только в тонком пограничном слое около резонансной поверхности. Если рассматривать картину крупным планом в масштабе порядка радиуса плазмы, то будет казаться, что радиальная производная B_x^1 имеет на радиусе резонансной поверхности разрыв

$$\Delta' = (B_x^1(r_s + \epsilon) - B_x^1(r_s - \epsilon)) / B_x^1(r_s), \quad (10.2.9)$$

где $r=r_s$ — радиус цилиндра, соответствующий $x=0$ в геометрии слоя. Это приближение дает оценку для $\partial^2 B_x^1 / \partial x^2$ внутри пограничного слоя:

$$\frac{\partial^2 B_x^1}{\partial x^2} \approx \Delta' B_x^1 / \epsilon, \quad (10.2.10)$$

где ϵ — ширина пограничного слоя. Используя (10.2.10) и (10.2.7), получаем приближенное выражение для плотности продольного тока внутри магнитного острова тиринг-моды

$$J_z^1 \approx \Delta' B_x^1 / k \epsilon. \quad (10.2.11)$$

Параметр Δ' появляется всюду в литературе по линейным резистивным тиринг-модам. Он является существенным звеном, связывающим пограничный слой и остальную плазму. Он определяется из расчета возмущения радиального магнитного поля в области вне пограничного слоя на основе уравнений идеальной магнитной гидродинамики с использованием граничных условий на стенке и главной магнитной оси плазмы. Радиальное поле, вычисленное таким образом, должно быть непрерывно на резонансной поверхности, а разрыв в его первой производной определяет Δ' . В этом разделе Δ' будет считаться заданной величиной. В круглом цилиндре для некоторых профилей тока Δ' была вычислена Фюртом, Резерфордом и Селбергом [15]. Глассер, Фюрт и Резерфорд [16] разработали численную программу для определения Δ' для любого экспериментально измеренного профиля. В геометрии плоского слоя полная задача на собственные значения

была решена в классической работе Фюрта, Киллина, Розенблюта [1].

Чтобы оценить толщину пограничного слоя и инкремент соответствующей тиринг-моды, приравняем амплитуды трех членов в законе Фарадея (10.2.1) и (10.2.2) внутри пограничного слоя:

$$\gamma B_x^1 \approx v_x^1 k B_*^1 \approx \eta_0 k J_z^1. \quad (10.2.12)$$

Из первого и последнего членов этих равенств и из (10.2.11) следует, что

$$\gamma \approx \eta^0 \Delta' / \epsilon. \quad (10.2.13)$$

Чтобы получить оценку инкремента, нужно определить ширину пограничного слоя ϵ .

Уравнение для ϵ возникает из баланса вынуждающей силы и инерционных эффектов. Чтобы оценить кинетическую энергию в пограничном слое, отметим, что $v_y \gg v_x$, как показано на рис. 10.3. Это следует из условия несжимаемости $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ и того факта, что полоидальная длина волны предполагается много большей ширины пограничного слоя $k\epsilon \ll 1$:

$$k v_y^1 \approx v_x^1 / \epsilon. \quad (10.2.14)$$

При этом скорость изменения кинетической энергии равна

$$\gamma \rho \frac{1}{2} [(v_x^1)^2 + (v_y^1)^2] \approx \gamma \rho \frac{1}{2} (v_x^1)^2 / (k\epsilon)^2. \quad (10.2.15)$$

Ее надо приравнять отнесенной к единице времени работе вынуждающей силы (10.2.3), действующей на жидкость:

$$\mathbf{v}^1 \mathbf{F} \approx v_x^1 B_*^1 J_z^1, \quad (10.2.16)$$

что дает

$$\gamma \rho v_x^1 \approx 2 \Delta' B_*^1 k \epsilon B_x^1. \quad (10.2.17)$$

Для нашей оценки в качестве типичного значения B_* внутри пограничного слоя нужно взять

$$B_* \approx B_*' \epsilon. \quad (10.2.18)$$

Последний шаг состоит в подстановке выражения для v_x^1 из (10.2.17) в (10.2.13) и в вычислении ϵ и γ . В результате ширина пограничного слоя оказывается равной:

$$\epsilon \approx \left(\frac{\rho \eta^2 \Delta'}{2 (k B_*')^2} \right)^{1/5} \approx S^{-2/5} (\Delta' a)^{1/5} \left(\frac{a}{R} n \frac{a q'}{q} \right)^{-2/5}. \quad (10.2.19)$$

Выражение для инкремента непосредственно следует из (10.2.13):

$$\gamma \approx 0,55 (\Delta')^{4/5} \left(\frac{\eta^2 (k B_*')^2}{\rho} \right)^{1/5}, \quad (10.2.20)$$

где множитель 0,55 взят из более точного расчета. Этот инкремент резистивной тиринг-моды можно записать в виде

$$\gamma = 0,55 \tau_R^{-3/5} \tau_A^{-2/5} (\Delta' \alpha)^{4/5} \left(\frac{a}{R} n \frac{aq'}{q} \right)^{2/5}, \quad (10.2.21)$$

где n — тороидальное волновое число;

$$\tau_R \equiv a^2 \mu / \eta \quad (10.2.22)$$

время диффузии поля в радиальном направлении, а

$$\tau_A \equiv a / V_A, \quad V_A \equiv B_{z0} / (\mu \rho)^{1/2} \quad (10.2.23)$$

альфвеновское пролетное время поперек плазмы. Можно сказать, что в таком виде инкремент на $2/5$ является альфвеновским и на $3/5$ диссипативным — промежуточным между МГД-масштабом и масштабом процессов переноса. Параметр

$$S \equiv \tau_R / \tau_A \quad (10.2.24)$$

называется магнитным числом Рейнольдса. В высокотемпературной плазме токамака S обычно порядка 10^6 и отсюда очевидно, что альфвеновские и резистивные масштабы хорошо разделены, а толщина пограничного слоя очень мала по сравнению с радиусом плазмы, несмотря на зависимость от S в степени $2/5$.

Вопрос 10.2.2. Условие

$$\Delta' > 0 \quad (10.2.25)$$

является необходимой предпосылкой для неустойчивости тиринг-моды. Почему?

Вопрос 10.2.3. Как могло бы изменить приложенное извне винтовое поле инкремент резонансной с ним тиринг-моды? Увеличит или уменьшит приложенное извне поле величину Δ' ?

Вопрос 10.2.4. Чему равна ширина резистивного пограничного слоя по сравнению с ионным ларморовским радиусом для высокотемпературной плазмы токамака ($T_e \approx T_i \approx 1 \div 10$ кэВ, $n_e \approx 10^{14}$ см $^{-3}$, $B \approx 5$ Тл, $a \approx 20 \div 50$ см, $R \approx 100 \div 200$ см)? Каков инкремент по сравнению с частотой столкновений или с частотой диамагнитного дрейфа? Эти оценки необходимо сделать, чтобы определить пределы применимости резистивной МГД-теории.

Рассмотрим теперь нелинейное развитие тиринг-моды. Резерфорд [18] показал, что когда ширина магнитного острова такая же, как ширина пограничного слоя, становится важной новая сила и инкремент неустойчивости сильно уменьшается. Вместо экспоненциального роста во времени ширина острова начинает расти, как линейная функция времени. Это будет продемонстрировано на простых оценках в следующих параграфах.

Возвращаясь еще раз к рис. 10.3, можно увидеть, что поле скоростей может дать вклад второго порядка $v_y^1 B_x^1$ в электрическое поле, что, в свою очередь, приводит к возмущению второго порядка в плотности тока вдоль магнитных островов

$$J_z^{(2)} \approx v_y^1 B_x^1 / \eta_0. \quad (10.2.26)$$

Этот ток имеет пространственную зависимость $\sin^2 ky$ и приводит к возникновению новой силы $J_z^{(2)} B_x^1$, которая всюду направлена

противоположно v_y^1 . Чтобы оценить влияние этой новой силы, приравняем мощность этой новой силы старой мощности (10.2.16):

$$v_y^1 J_z^{(2)} B_x^1 \approx v_x^1 J_z^1 B_*. \quad (10.2.27)$$

Используя (10.2.11) в (10.2.18), прямой подстановкой убеждаемся, что эти мощности приравниваются, когда

$$\varepsilon \approx (B_x^1 / k B_*)^{1/2}. \quad (10.2.28)$$

Выражение в правой части этого уравнения — это просто ширина острова в геометрии плоского слоя (10.1.9). Поэтому из (10.2.28) следует, что инкремент тиринг-моды уменьшается, когда ширина острова становится такой же, как ширина резистивного пограничного слоя (10.2.19).

Теперь мы можем оценить скорость роста острова в этих новых обстоятельствах. С помощью более строгого вывода и численного расчета можно показать, что структура магнитного острова сохраняет свою зависимость $\sin ky$ и что более высокие гармоники неважны для этой оценки. В этом случае выражения (10.2.1) и (10.2.2) можно скомбинировать и приближенно записать как

$$\frac{\partial}{\partial t} B_x^1 \approx k \eta^0 J_z^1. \quad (10.2.29)$$

На основе тех же аргументов, которые использовались при выводе (10.2.11), можно показать, что плотность продольного тока, протекающего в пределах ширины острова, приближенно равна

$$J_z^1 \approx \Delta' B_x^1 / kW, \quad (10.2.30)$$

где W — ширина острова, определяемая в геометрии плоского слоя с помощью (10.1.9) или в случае круглого цилиндра выражением (10.1.14). Выражая возмущение радиального поля B_x^1 через ширину острова W , получаем

$$\frac{d}{dt} W \approx 1,66 \eta \Delta' / k, \quad (10.2.31)$$

где множитель 1,66 взят из более строгого вывода. Так как η и Δ' предполагаются постоянными во времени, выражение (10.2.31) показывает, что ширина острова растет как линейная функция времени. Существенным пунктом в этом выводе является то, что толщина пограничного слоя заменена шириной острова.

Наконец, как показали Уайт и др. [19], когда острова становятся достаточно широкими, рост ширины острова прекращается, что описывается уравнением

$$\frac{d}{dt} W \approx 1,66 \eta (r_s) [\Delta'(W) - \alpha W] k, \quad (10.2.32)$$

где r_s — радиус первоначальной резонансной поверхности; $\Delta'(W)$ — разрыв в производной возмущения радиального магнитного поля от одного края острова до другого, а α — численная константа, которая получается с помощью сшивки плотности по-

тока и тока через сепаратрису острова. Если в прямом цилиндре круглого сечения использовать условия стационарности

$$\eta^0(r) J_z^0(r) = E^0, \quad (10.2.33)$$

где E^0 — однородное, приложенное извне электрическое поле, то α определяется выражением:

$$\alpha \approx \frac{m^2}{r_s^2} - \frac{\delta}{r_s} - \frac{1,1\delta}{kB'_*} \frac{dJ_z^0}{dr} - \frac{0,4}{kB'_*} \frac{d^2 J_z^0}{dr^2}, \quad (10.2.34)$$

где $\delta \equiv (B_r^1)' / B_r^1$ — характеристика радиальной асимметрии B_r^1 на резонансной поверхности. Как и Δ' , α можно определить, решая уравнение для возмущения радиального магнитного поля в области за магнитными островами. Для пикированных стационарных профилей тока было найдено, что ширина насыщения обычно равна нескольким десяткам от радиуса плазмы.

В заключение можно сказать, что после короткой фазы экспоненциального роста (10.2.21) ширина магнитного острова тиринг-моды начинает расти, как линейная функция времени (10.2.31), когда ширина острова становится сравнимой с толщиной резистивного пограничного слоя и, в конце концов, ширина острова насыщается в соответствии с (10.2.32).

§ 10.3. РЕЗИСТИВНАЯ ТИРИНГ-МОДА $m=1$

В § 6.5 было показано, что в цилиндрическом плазменном шнуре круглого сечения внутренняя винтовая мода $m=1$ неустойчива, как только значение q в центре падает ниже $1 + O(ka)$, где k — продольное волновое число, a — радиус токового канала. Если резонансная поверхность $q=1$ находится в области большого шира вдали от центра плазмы, то можно выделить две характерные области. В пределах поверхности $q=1$ каждый слой сечения плазмы имеет примерно однородную поперечную скорость, направление которой меняется на 360° на длине волны неустойчивости. В тонком же пограничном слое, окружающем эту центральную область, существует большая обратная скорость, направленная вдоль поверхности $q=1$ и обеспечивающая замыкание потока плазмы. Вне поверхности $q=1$ поток плазмы и возмущение магнитного поля очень малы. Инкремент (6.5.9) был вычислен в § 6.5 приравниванием силы, приводящей к неустойчивости и действующей внутри поверхности $q=1$, к инерции, играющей основную роль внутри пограничного слоя. При этих условиях ясно, что эффекты неидеальности, которые существенно меняют течение внутри пограничного слоя, при определении инкремента резистивной неустойчивости возьмут на себя роль инерции.

Если в пограничном слое существует достаточно большое сопротивление, то возникает тиринг-мода $m=1$ с одним магнитным островом, линейный инкремент которой равен

$$\gamma = (q'(r_s) ka^2 S)^{2/3} \tau_R^{-1}, \quad (10.3.1)$$

где \tilde{S} и τ_R определяются (10.2.24) и (10.2.22). В действительности идеальный инкремент (6.5.9) и резистивный инкремент (10.3.1) являются двумя пределами более полного дисперсионного соотношения, выведенного Коппи и др. [27]. В плазме с низким β , по-видимому, должен использоваться полученный резистивный инкремент, даже если он несколько меньше, чем идеальный инкремент (6.5.9), так как идеальная мода, как показали Розенблут, Дагазьян и Резерфорд [38], начинает насыщаться из-за нелинейных эффектов уже при малой амплитуде, в то время как резистивная мода продолжает расти, как следует из расчетов Ваддела и др. [30], пока центральная область плазменного шнура полностью не перемешается. Отметим, что при увеличении ширины инкремент резистивной моды возрастает [$\gamma \sim (q'(r_s))^2/\beta^3$], в то время как инкремент идеальной моды уменьшается [$\gamma \sim q'(r_s)^{-1}$]. Оба типа неустойчивости $m=1$ при таком рассмотрении зависят от локальных условий на поверхности $q=1$.

На пограничный слой вблизи поверхности $q=1$ большое влияние оказывают и другие процессы переноса. Бюссак и др. [29], а также Ваддел, Лаваль, Розенблут [28] показали, что идеальная мода $m=1$ полностью стабилизируется эффектами конечного ларморовского радиуса, если ее инкремент (6.5.9) меньше половины ионной частоты диамагнитного дрейфа

$$\omega_{*i} \equiv p'_i(r_s)/(enr_s B_z). \quad (10.3.2)$$

Их анализ показывает, однако, что аналогичный эффект не стабилизирует полностью резистивную моду $m=1$, а только уменьшает ее инкремент. Уменьшенный инкремент этой резистивной моды равен

$$\gamma \approx \gamma_\tau^3 / (\omega_{*i} \omega_{*e}) \quad (10.3.3)$$

и применим в пределах

$$\gamma_k \tau_A \ll (ka)^2, \quad \gamma_\tau \ll \omega_{*i}/2; \quad \gamma_\tau \ll \omega_{*e}/2, \quad (10.3.4)$$

где γ_τ — инкремент тиринг-моды (10.3.1); γ_k — инкремент идеальной моды (6.5.9), а

$$\omega_{*e} = (p'(r_s) + 0,71nT'_e(r_s))/(enr_s B_z) \quad (10.3.5)$$

— электронная частота диамагнитного дрейфа, где T_e — электронная температура; n — плотность частиц; r_s — радиус поверхности $q=1$.

Нелинейное развитие резистивной тиринг-моды $m=1$ привлекло большое внимание, поскольку считается, что эта мода вызывает пилообразные колебания, наблюдаемые в токамаке по мягкому рентгеновскому излучению. Б. Б. Кадомцев [10] дал теоретическое описание этого процесса, которое было в значительной степени подтверждено численными расчетами Ваддела и др. [30]. Достаточно полную картину пилообразных колебаний и детальное сравнение с экспериментом сделали Джанс и др. [39]. Этот вопрос обсуждается в § 11.1.

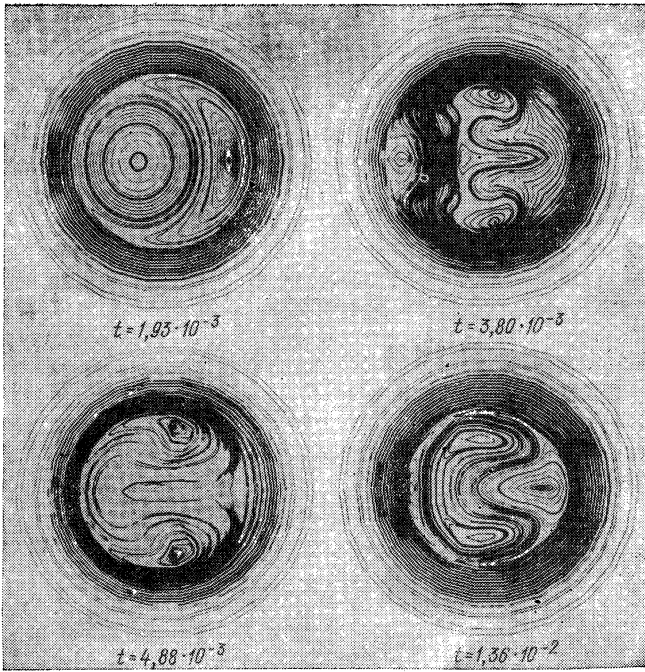
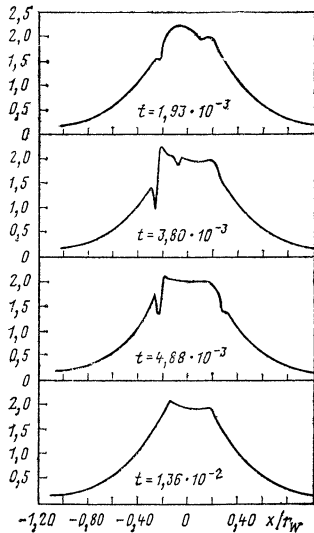


Рис. 10.4. Нелинейная эволюция контуров функции винтового потока для резистивной тиринг-моды $m=1$ [30]

Рис. 10.5. Сечение профиля плотности продольного тока при развитии резистивной тиринг-моды $m=1$, показанной на рис. 10.4 [30]



На рис. 10.4 и 10.5 показан пример численного расчета нелинейного развития резистивной тиринг-моды $m=1$ в круглом цилиндре. При $t=1,93 \cdot 10^{-3}$ (рис. 10.4) первоначальная магнитная ось цилиндра сдвинута влево, так что справа образовался большой остров $m=1$, центр которого расположен на первоначальной поверхности с $q=1$. По мере того как магнитные силовые линии в области заострений серповидного острова разрываются, они стягиваются, оставляя за собой область слабого магнитного давления. Магнитное давление остатка острова продолжает выталки-

вать первоначальный центр влево, пока он полностью не разрушится. Все это приводит к уплощению профиля плотности тока и профиля q в центральной области плазмы, как показано на рис. 10.5. Из центра плазмы при этом за поверхность $q=1$ выплескивается избыточная тепловая энергия. Это кольцо горячей плазмы быстро рассасывается, а температура в центре плазмы из-за омического нагрева опять постепенно нарастает, и цикл пилообразных колебаний начинается снова. Мы вернемся к этому сравнению с экспериментом в § 11.1.

До тех пор пока профиль тока не станет полностью плоским, ширина острова $m=1$ продолжает расти экспоненциально примерно с линейным инкрементом. Это поведение полностью отличается от поведения тиринг-мод $m \geq 2$, рассматривавшихся в § 10.3. После того как профиль тока станет плоским, а q всюду станет выше единицы, мода неожиданно прекращает рост, оставляя только вихревую картину поля скоростей, которая постепенно исчезает за счет вязкости. На рис. 10.4 и 10.5 экспоненциальное нарастание неустойчивости прекратилось в момент $t=3,8 \cdot 10^{-3}$.

§ 10.4. РЕЗИСТИВНАЯ ПЕРЕСТАНОВочНАЯ МОДА

Второй тип широко изучавшейся резистивной неустойчивости называется *резистивной перестановочной модой*. Эта неустойчивость возбуждается обращенным градиентом плотности в гравитационном поле или обращенным градиентом давления в искривленном магнитном поле. Поэтому резистивная перестановочная мода в геометрии плоского слоя аналогична неустойчивости Рэлея—Тейлора, а в цилиндрической или тороидальной плазме — идеальным перестановочным МГД-модам типа Сайдема или Мерсье, или баллонным модам. В то время как винтовые или тиринг-моды возбуждаются за счет магнитной потенциальной энергии, содержащейся во всем объеме, перестановочные моды связаны с локальными градиентами давления и локальной кривизной.

В начале этого раздела сделана оценка инкремента и ширины пограничного слоя резистивной перестановочной моды в геометрии плоского слоя. Во второй части раздела рассмотрено дисперсионное соотношение, объединяющее как резистивные перестановочные, так и тиринг-моды в реальной тороидальной геометрии. Оценка инкремента, которая непосредственно вытекает из работы Фурта, Киллина, Розенблюта [1], будет сделана в том же духе, как и оценки § 10.2.

Рассмотрим плоский слой с обращенным градиентом плотности в гравитационном поле и магнитном поле с широм, как описано в § 10.2. Теперь в уравнении движения надо рассмотреть две силы

$$\rho^0 \frac{\partial}{\partial t} v_x^1 = -\rho^1 g - J_z^2 B_*, \quad (10.4.1)$$

где обозначения такие же, как в § 10.2, за исключением ускоре-

ния силы тяжести g и возмущения плотности ρ^1 , которое для несжимаемого движения плазмы равно

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho^1 = -v_x^1 \frac{\partial}{\partial x} \rho^0(x). \quad (10.4.2)$$

Так как $v_y^1 \gg v_x^1$, хорошую оценку инерционных эффектов можно сделать, приравнявая скорость изменения кинетической энергии

$$\frac{1}{2} \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} [(v_x^1)^2 + (v_y^1)^2] \approx \rho^0 \gamma (v_x^1)^2 / (k\varepsilon)^2 \quad (10.4.3)$$

работе, совершаемой гравитационной силой

$$\mathbf{F}_g \cdot \mathbf{v}_x^1 = -\rho^1 g v_x^1 \quad (10.4.4)$$

и силой $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{J} \times \mathbf{B}} \cdot \mathbf{v}_x^1 = -J_z^1 B_* v_x^1, \quad (10.4.5)$$

причем внутри пограничного слоя

$$J_z^1 \approx v_x^1 B_* / \eta. \quad (10.4.6)$$

Приравнявая эти три члена и используя (10.2.18), получаем оценку инкремента резистивной перестановочной моды

$$\gamma \approx \left(\frac{\eta}{\rho}\right)^{1/3} \left(\frac{\rho' g k}{B_*'}\right)^{2/3} \approx \tau_R^{-1/3} \tau_A^{2/3} (kg)^{2/3} \left(\frac{\rho' q}{\rho q'}\right)^{2/3} \quad (10.4.7)$$

и толщины пограничного слоя

$$\frac{\varepsilon}{a} \approx \tau_R^{-1/3} \tau_A^{2/3} \left(\frac{\rho' g}{\rho}\right)^{1/6} (ka)^{-1/3} \left(\frac{q}{q'a}\right)^{2/3}, \quad (10.4.8)$$

где резистивное и альфвеновское времена τ_R и τ_A определены выражениями (10.2.22) и (10.2.23).

Отметим, что инкремент резистивной перестановочной неустойчивости растет пропорционально $\eta^{1/3}$, т. е. быстрее, чем инкремент тиринг-моды, пропорциональный $\eta^{2/3}$. Это частично компенсируется тем, что шир уменьшает инкремент перестановочной моды, в то время как тиринг-мода усиливается при увеличении шира. Наконец, видно, что резистивная перестановочная мода зависит только от локальных условий на резонансной поверхности, в противоположность тиринг-моды, для которой параметр Δ' связывает поведение в пограничном слое с решением идеальных МГД-уравнений в основной части плазмы. По этой причине резистивная перестановочная мода должна рассматриваться как локальная неустойчивость, локализованная вблизи своей резонансной поверхности, хотя, как указывали Робертс и Тейлор, несколько близких резистивных перестановочных мод, каждая на своей резонансной поверхности и с близкими инкрементами, могут связываться вместе и образовывать вытянутые конвективные ячейки, которые прокручиваются в объеме плазмы, следуя за перекрещенностью силовых линий. Это глобальное зацепление перестановочных мод

может быть важным для баллонных мод в токамаках с большим β , описанных в § 8.2 и 8.3.

Вопрос 10.4.1. Каков инкремент резистивной перестановочной моды по сравнению с инкрементом неустойчивости Рэля—Тейлора (3.3.7), локализованной около поверхности $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0$ в магнитном поле с большим широм?

В тороидальной геометрии разработана полная теория пограничного слоя для линейризованных резистивных МГД-уравнений, которая объединяет особенности как тиринг-моды, так и резистивных перестановочных мод. Эту разработку начали Коппи, Грин и Джонсон [34] и продолжил Глассер совместно с Грином и Джонсоном [31]. Ясный и последовательный обзор этого подхода приведен в лекциях Грина [2]. Эта теория является существенно более сложной, чем вывод критерия Мерсье, данный в § 7.2.

В пределе токамака с большим аспектным отношением, низким β и круглым сечением Глассер, Грин и Джонсон упростили дисперсионное уравнение и свели его к следующему:

$$\Delta' = 2,12 \frac{V_s}{X_0} Q^{5/4} (1 - \pi D_R / 4Q^{3/2}). \quad (10.4.9)$$

Здесь требуется некоторое объяснение обозначений. Величина Δ' — это обобщение определения (10.2.9) для разрыва радиальной производной возмущения радиального магнитного поля. Как и при выводе критерия Мерсье, перпендикулярная компонента смещения приблизительно однородна вдоль силовой линии магнитного поля вблизи резонансной поверхности и имеет вид:

$$\xi \approx A |r - r_s|^{-s} + B |r - r_s|^{s+1}. \quad (10.4.10)$$

где r_s — малый радиус резонансной поверхности, а A , B и s определяются решением идеальных МГД-уравнений за пределами резистивного пограничного слоя. Величина Δ составляется из независимых решений внутри и снаружи от резонансной поверхности:

$$\Delta' \equiv \frac{A_{\text{внешн}}}{B_{\text{внешн}}} - \frac{A_{\text{внутр}}}{B_{\text{внутр}}}. \quad (10.4.11)$$

Для плоского слоя это определение сводится к (10.2.9). Большой по масштабу множитель V_s/X_0 в (10.4.9) определяется как отношение макроскопического масштаба длины к толщине резистивного пограничного слоя:

$$\frac{V_s}{X_0} \approx \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{nB_{\text{тор}} q'}{\eta R q} \right)^2 / (1 + 2q^2) \right]^{1/6}. \quad (10.4.12)$$

Инкремент в (10.4.9) нормализован на инкремент резистивной перестановочной моды:

$$Q \equiv \gamma/Q_0; \quad (10.4.13)$$

$$Q_0 \approx \left[\frac{\eta}{\rho} \left(\frac{nB_{\text{тор}} q'}{R q} \right)^2 / (1 + 2q^2) \right]^{1/3}. \quad (10.4.14)$$

Наконец, величина D_R учитывает возбуждающую силу резистивной перестановочной моды:

$$D_R \approx \frac{2\mu p'}{B_{\text{top}}^2 r_s} \frac{q^*}{(q')^2} \left[1 - \frac{1}{q^2} + \frac{qq'}{r_s^3} \int_0^s dr \frac{r^3}{q^2} \left(1 - \frac{2\mu R^2 q^2 p'}{r B_{\text{top}}^2} \right) \right]. \quad (10.4.15)$$

Как и ранее, ρ — это плотность вещества, η — сопротивление на резонансной поверхности, n — тороидальное волновое число, $q' = dq/dr$.

Соотношение (10.4.9) допускает три режима неустойчивости. Если $D_R > 0$, то член в круглых скобках в правой части (10.4.9) может быть близок к нулю (так как V_s/X_0 очень велико) и дисперсионное уравнение дает резистивную перестановочную моду, которая растет с инкрементом $Q \approx (\pi D_R/4)^{2/3}$ или $\gamma \sim \eta^{1/3}$. Отметим, что дестабилизирующий член D_R в основном такой же, как и дестабилизирующий член неустойчивости Мерсье, но без стабилизирующего члена с широм. Шир замедляет резистивную перестановочную моду, но не стабилизирует ее полностью.

Если $D_R = 0$ и $\Delta' > 0$, то дисперсионное соотношение (10.4.9) дает обычную тиринг-моду с инкрементом

$$\gamma \sim Q_0 (X_0/V_s)^{4/5} \sim \eta^{3/5} (q'/q)^{2/5}. \quad (10.4.16)$$

Наконец, если $D_R < 0$ и Δ' заведомо положительно,

$$\Delta' > 1,54 (V_s/X_0) |D_R|^{5/6} \sim \eta^{-1/3}, \quad (10.4.17)$$

то в дисперсионном соотношении важны все три члена и неустойчивые решения комплексные. Это сверхустойчивое решение напоминает поведение колебаний Мирнова. Физика возникновения комплексной частоты в отсутствие эффектов Холла и конечного ларморовского радиуса до конца пока не ясна.

Более подробное дисперсионное соотношение, применимое к произвольной геометрии, и более подробный его вывод можно найти в работе Глассера, Грина, Джонсона [31]. Они нашли, что тороидальность оказывает стабилизирующее влияние на тиринг-моды, хотя наиболее важным фактором в определении устойчивости этих мод является профиль плотности тока. Конечное давление и сжимаемость также играют важную роль в этих неустойчивостях.

Даже при наличии шира магнитного поля резистивная перестановочная мода может приводить к возникновению конвективных ячеек Бенарда [37]. О нелинейном развитии моды при этих условиях известно очень мало.

§ 10.5. РЕЗЮМЕ

Под действием приложенного извне возмущения магнитного поля или какой-либо из неустойчивостей, рассмотренных выше, плазма с конечной проводимостью стремится разбиться на винтовые трубки, называемые магнитными островами. Для заданного

возмущения радиального магнитного поля ширина острова в плоском слое определяется выражением (10.1.9), а для круглого цилиндра выражением (10.1.14).

Общее дисперсионное соотношение для линейного инкремента резистивных неустойчивостей с $m \geq 2$ дается выражением (10.4.9). На более простых моделях было показано, что большой градиент давления в искривленном магнитном поле или обращенный градиент плотности в гравитационном поле могут вызывать резистивные перестановочные моды с инкрементом, пропорциональным $\eta^{1/3}$. Ток плазмы может вызывать резистивные тиринг-моды с инкрементом, пропорциональным $\eta^{3/5}$, как в (10.2.21). Выражение (10.2.32) приближенно определяет нелинейный рост ширины острова тиринг-моды и справедливо вплоть до ее насыщения.

Особый тип резистивной тиринг-моды с $m=1$ обладает инкрементом (10.3.1) или с учетом эффектов конечного ларморовского радиуса (10.3.3). Эта мода насыщается только после того, как остров захватит центр плазмы.

§ 10.6. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Классической работой в этой области является:

1. Furth H. P., Killeen J., Rosenbluth M. N. — Phys. Fluids, 1963, v. 6, p. 459—484, напечатанная также в книге: MHD Stability and Thermonuclear Containment. A. Jeffrey and T. Taniuti, ed. N. Y., Academic Press, 1966.

Современный обзор математической теории линейных резистивных неустойчивостей содержится в лекциях:

2. Greene J. M. Introduction to Resistive Instabilities. Report LRP/76, Lausanne, Switzerland, 1976.

Обсуждение иллюстрации по магнитным островам можно найти в работах:

3. Морозов А. И., Соловьев Л. С. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 2. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1962, с. 92.

4. Finn J. M. — Nucl. Fusion, 1975, v. 15, p. 845—854.

5. Chrisman P., Clarke J., Rome J. Report ORNL/TM-4501, Oak Ridge 1974.

6. Matsuda S., Yoshikawa M. — Japan J. Appl. Phys., 1975, v. 14, p. 87—94.

7. Vuillemin M., Gourdon C. Report EUR-CEA-FC-393, Fontenay-aux-Roses, France, 1967.

В работе [7] имеются прекрасные иллюстрации (воспроизведенные в книге Мерсье и Люка) магнитных островов и, по всей видимости, эргодических областей аналитически заданного вакуумного магнитного поля.

Перезамыкание магнитных силовых линий изучено в работах:

8. Taylor J. B. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 1139—1141.

9. Jukes J. D. IAEA Berchtesgaden Conf., 1976, v. 1, p. 479—488.

10. Кадомцев Б. Б. — Физика плазмы, 1975, т. 1, с. 710.

11. Кадомцев Б. Б. — IAEA Berchtesgaden Conf., 1976, v. 1, p. 555—565.

12. Rechester A. B., Stix T. H. — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 587—591.

13. Stix T. H. — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 521—524.

14. Rosenbluth M. N. e. a. — Nucl. Fusion, 1966, v. 6, p. 297—300.

После Фюрта, Киллина, Розенблюта тиринг-моды исследовались в статьях:

15. Furth H. P., Rutherford P. H., Selberg H. — Phys. Fluids, 1973, v. 16, p. 1054—1063.

16. Glasser A. H., Furth H. P., Rutherford P. H. — Phys. Rev. Lett, 1977, v. 38, p. 234—237.

17. Hastie R. J. e. a. — Nucl. Fusion, 1977, v. 17, p. 515—523.

18. Rutherford P. H. — Phys. Fluids, 1973, v. 16, p. 1903—1908.

19. White R. B. e. a. — Ibid., 1977, v. 20, p. 800—805; IAEA Berchtesgaden Conf., 1976, v. 1, p. 569—577.
20. Biskamp D., Welter H. — Ibid., p. 579—590.
21. Finn J. M. — Phys. Fluids, 1977, v. 20, p. 1749—1757.
22. Drake J. F., Lee Y. C. — Phys. Fluids, 1977, v. 20, p. 1341—1353; Phys. Rev. Lett., 1977, v. 39, p. 453—456.
23. Rutherford P. H., Furth H. P. — MATT-872, Princeton, 1971.
24. DiBiase J. A., Killeen J. Report UCRL-78796, Lawrence Livermore Laboratory, 1976.
25. Wesson J. A. — Nucl. Fusion, 1966, v. 6, p. 130—134.
26. Barston E. M. — Phys. Fluids, 1969, v. 12, p. 2162—2174.
- Резистивная мода $m=1$ рассматривалась в работах:
27. Коппи Б. и др. — Физика плазмы, 1976, т. 2, с. 533—535.
28. Waddell B. V., Laval G., Rosenbluth M. N. Report ORNL/TM-5968, Oak Ridge, 1977.
29. Bussac M. N. e. a. IAEA Berchtesgaden Conf., 1977, v. 1, p. 607—613.
30. Waddell B. V. e. a. — Nucl. Fusion, 1976, v. 16, p. 528—532.
- В дополнение к обзорным статьям [1, 2] резистивные перестановочные моды изучались в работах:
31. Glasser A. H., Greene J. M., Johnson J. L. — Phys. Fluids, 1976, v. 19, p. 567—574.
32. Mikhailovskii A. B. — Nucl. Fusion, 1975, v. 15, p. 95—102.
33. Johnson J. L., Greene J. M. — Plasma Phys., 1967, v. 9, p. 611—629.
34. Coppi B., Greene J. M., Johnson J. L. — Nucl. Fusion, 1966, v. 6, p. 101—117.
35. Roberts K. V., Taylor J. B. — Phys. Fluids, 1965, v. 8, p. 315—322.
36. Dagasian R. Y. — Ibid., 1976, v. 19, p. 169—170.
37. Dagasian R. Y., Paris R. B. — Ibid., 1977, v. 20, p. 917—927.
- В тексте также были ссылки на работы:
38. Rosenbluth M. N., Dagasian R. Y., Rutherford P. H. — Phys. Fluids, 1973, v. 16, p. 1894—1902.
39. Jahns G. L. e. a. — Nucl. Fusion, 1978, v. 18, p. 609—628.
40. Callen J. D., Jahns G. L. — Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 491—494.

Глава 11. СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

В тороидальных системах для удержания плазмы наблюдаются по крайней мере пять типов крупномасштабных неустойчивостей.

1. Пилообразные колебания или внутренние срывы наблюдаются как релаксационные колебания на мягком рентгеновском излучении из центральной части плазменного шнура.

2. Колебания Мирнова, которые являются регулярными колебаниями магнитного поля и могут быть зафиксированы снаружи от плазменного шнура. Они соответствуют движущейся винтовой структуре, которую можно наблюдать по сигналу мягкого рентгеновского излучения из областей вблизи края плазмы.

3. Неустойчивость срыва, которая проявляется как резкое расширение профилей температуры и плотности тока, сопровождающееся большим отрицательным выбросом на напряжении обхода, резкой потерей убегающих электронов и многими другими эффектами.

4. Винтовая неустойчивость $m=1$, которая выбрасывает плазму на стенку и наблюдается, если $q_{\text{TP}} < 1$.

5. Неустойчивость типа перетяжек $m=0$, которая возникает, когда тороидальное поле фактически отсутствует, и возбуждает большие локальные электрические поля и быстро нарушает удержание плазмы.

Первые два типа неустойчивостей слабые и наблюдаются в нормальных режимах токамака. Третья неустойчивость может сорвать разряд и повредить стенки, но ее можно избежать тщательным выбором рабочих параметров. Последние две неустойчивости были препятствиями на заре исследований, но они легко устраняются при использовании сильного тороидального магнитного поля. Существуют и другие типы неустойчивостей и другие способы классификации экспериментальных наблюдений, но в настоящее время эксперименты на токамаках обычно используют представленную здесь классификацию.

Основной темой этой главы будут пилообразные колебания, колебания Мирнова и неустойчивость срыва. Мы сделаем попытку описать картину каждого из этих явлений, основанную на некоторых теоретических представлениях, и увидим, где еще необходимы дальнейшие исследования. Поскольку полное сравнение теории с экспериментом не входит в задачу этой главы, здесь даны ссылки на большое число статей, где такое сравнение сделано. Чтобы избежать ненужного повторения, за описанием экспериментальных наблюдений этих неустойчивостей мы отсылаем читателя к их обзору в гл. 1.

§ 11.1. ПИЛООБРАЗНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Очень убедительную картину развития пилообразных колебаний разработали Джанс и др. [1]. Отдельные части такой модели были ранее предложены Б. Б. Кадомцевым [3], Сайксом и Вессоном [5] и др. Согласно этой модели пилообразные колебания являются результатом конкуренции двух эффектов. Во-первых, плотность продольного тока стремится сконцентрироваться на магнитной оси, так как центр плазмы, вообще говоря, нагревается более быстро, чем край — так называемая «тепловая неустойчивость» [6]. Если плотность тока возрастет настолько сильно, что значение q упадет ниже единицы на магнитной оси, то становится неустойчивой резистивная тиринг-мода $m=1$, $n=1$, которая приводит к уплощению профилей температуры и тока вблизи центра плазмы. Как мы увидим ниже, неустойчивость $m=1$ может нарастать взрывным образом, приводя к резкому падению температуры непосредственно за поверхностью $q=1$. Затем все возвращается к медленным временным изменениям, избыток температуры за поверхностью $q=1$ рассасывается, и центр плазмы снова нагревается, что приводит в конце концов к следующему пилообразному колебанию.

В этом параграфе будут суммированы результаты работ

Джанса и др. [1] и Каллена и Джанса [2], которые были специально посвящены отысканию количественного согласия между теоретическими предсказаниями и экспериментальными наблюдениями пилообразных колебаний. Во-первых, мы рассмотрим те эффекты, которые относятся к моде $m=1$, а затем рассмотрим процессы переноса, обуславливающие осесимметричную часть $m=0$ пилообразных колебаний.

Как предпосылка для неустойчивости моды $m=1, n=1$, внутри плазмы должна лежать поверхность с $q=1$. При пикированном профиле тока значение q минимально на магнитной оси и монотонно увеличивается к краю плазмы. Поэтому при увеличении тока или при его пикировании к центру поверхность $q=1$ сначала появится на магнитной оси, а затем постепенно будет отодвигаться по радиусу. Для произвольной тороидальной плазмы q на магнитной оси в общем случае равно

$$q_{\text{ось}} = B_{\varphi}/R \left| \frac{\partial}{\partial R} (RB_y) \frac{\partial}{\partial y} (RB_R) \right|^{1/2} \quad (11.1.1)$$

или для плазмы круглого сечения и низкого β

$$q_{\text{ось}} \approx B_{\varphi} / R \frac{1}{2} J_{\varphi}. \quad (11.1.2)$$

Вообще говоря, прямое экспериментальное измерение магнитного поля или плотности тока внутри высокотемпературной плазмы сделать невозможно, но плотность тока в центре можно получить из закона Ома со спитцеровской проводимостью (2.6.18), зная измеренное тороидальное электрическое поле ($E_{\Phi} \approx E_{\Phi 0} R_0/R$ в стационарном состоянии) и электронную температуру (по томпсоновскому рассеянию лазерного света) и пользуясь оценкой для концентрации примесей ($Z_{\text{эф}}$), полученных из других измерений. Оценка $Z_{\text{эф}}$ — наиболее слабое звено в этой цепи. Тем не менее существует единодушное мнение, что условие $q_{\text{ось}}=1$ совпадает с началом пилообразных колебаний в широком диапазоне параметров токамака.

Рассмотрим теперь временную зависимость пилообразных колебаний. Группа TFR [9] установила, что сигнал рентгеновского излучения вызывается изменениями электронной температуры, а не изменениями плотности плазмы. Джанс с соавт. [1] и другие показали, что медленную нарастающую часть пилообразных колебаний вблизи центра плазмы можно объяснить омическим нагревом и соответствующим переносом энергии. Последний шаг тогда состоит в том, чтобы показать, как мода $m=1$ приводит к резкому падению температуры в конце каждого пилообразного колебания.

Так как инкремент моды $m=1$ сильно зависит от ширины на поверхности $q=1$, Джанс с соавт. [1] разработали модель временной эволюции профилей $T_e(r)$, $J_z(r)$ и $q(r)$ вблизи центра плазмы.

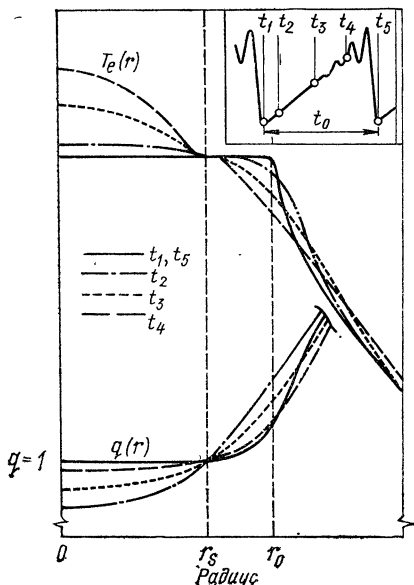


Рис. 11.1. Модель эволюции профилей электронной температуры и q во время пилообразных колебаний [1]

Эта модель приведена на рис. 11.1, на котором для наглядности деформация профиля $q(r)$ специально преувеличена. Предполагается, что в течение всего пилообразного колебания положение поверхности $q=1$ остается зафиксированным при $r=r_s$. По мере того как электронная температура и плотность продольного тока, полученная из закона Ома, пикируются на магнитной оси, шир $d \ln q / d \ln r$ в точке r_s быстро увеличивается. Например, если электронная температура увеличивается со временем линейно следующим образом:

$$T_e(r, t) = T_{e0} \left\{ 1 + \frac{t}{\tau_h} [1 - 3(r/r_s)^2 + 2(r/r_s)^3] \right\}. \quad (11.1.3)$$

что согласовано с условием $\partial T_e / \partial r |_{r_s} = 0$ и фиксированной T_e в точке r_s , то из закона Фарадея совместно со спитцеровской проводимостью получаем

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial t} \approx \frac{\partial}{\partial r} \eta J_z \approx -\frac{3}{2} \eta_0 J_{z0} \frac{1}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial r}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \ln q}{\partial \ln r} \Big|_{r_s} \approx \frac{q \eta_0 J_{z0} r}{B_\theta} \frac{t}{\tau_h} \Big|_{r_s}. \quad (11.1.4)$$

Отсюда следует, что шир в точке $r=r_s$ увеличивается квадратично во времени:

$$\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{\partial q}{\partial r} \Big|_{t=0} + \frac{q \eta_0 J_{z0} q}{2 B_\theta \tau_h} \Big|_{r_s} t^2, \quad (11.1.5)$$

где скорость нагрева на магнитной оси $1/\tau_h$ определяется при омическом нагреве формулой:

$$\tau_h \approx 3/2 n_{e0} T_{e0} / \eta_0 J_{z0}^2. \quad (11.1.6)$$

Инкремент резистивной тиринг-моды $m=1$ с учетом эффектов конечного ларморовского радиуса в соответствии с (10.3.3) и (10.3.1) $\sim [q'(r_s)]^2$. Отсюда следует, что временная зависимость этой моды $\exp\left(\int dt \gamma(t)\right)$ в течение каждого пилообразного колебания испытывает переход от простого экспоненциального

роста $\exp(\gamma_0 t)$, когда в (11.1.5) преобладает первоначальная величина ширины, к взрывообразному росту $\exp(\gamma_i t^{5/3})$, когда в (11.1.5) начинает доминировать квадратичный член. Этот вывод теории подтверждается экспериментальными наблюдениями. Более того, длительность быстрого падения температуры согласуется с этим типом моды, но явно не согласуется с соответствующими оценками, сделанными для идеальной внутренней винтовой МГД-моды $m=1$ или для резистивной тиринг-моды $m=1$ без учета эффектов конечного ларморовского радиуса. Наконец, используя предположение, что ширина острова $m=1$ первоначально равна ширине резистивного слоя тиринг-моды (10.2.19) и что во временной эволюции преобладает зависимость $\exp(\gamma_i t^{5/3})$, можно получить оценку для времени повторения пилообразных колебаний, которая, к удивлению, оказалась очень хорошей:

$$\bar{t} \approx \left(\frac{r_s}{a}\right)^{6/5} \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{2/5} \left(\frac{\tau_A}{ka}\right)^{2/5} \tau_h^{2/5} \omega_*^{2/5} \tau_R^{3/5}, \quad (11.1.7)$$

где $r_s = r_{q=1}$; a — радиус плазмы; τ_R , τ_A и τ_h даны выражениями (10.2.22), (10.2.23) и (11.1.6), а в (10.3.2) и (10.3.5) предполагается, что $\omega_* i = \omega_{*e} \equiv \omega_*$.

При анализе пространственной структуры колебаний $m=1$ установлено, что сигнал рентгеновского излучения наиболее силен внутри поверхности $q=1$ и быстро падает на больших радиусах. Численное моделирование резистивной тиринг-моды $m=1$, $n=1$, подобное описанному в § 10.3 и проиллюстрированному на рис. 10.4, 10.5, воспроизводит эту структуру как функцию радиуса достаточно хорошо. Однако частота вращения пока точно не предсказывается.

Тепло, которое выносится из центра плазмы во время резкого падения температуры, распределяется в тонком кольце непосредственно за поверхностью $q=1$, откуда постепенно рассасывается. Этот локальный импульс тепла дает прекрасную возможность для измерения локальной теплопроводности поперек магнитных поверхностей за поверхностью $q=1$. Распространение теплового импульса за поверхностью $q=1$ можно ясно увидеть по впадинам пяти осциллограмм на рис. 11.2. После тщательного анализа экспериментальных данных Каллен и Джанс [2] — смогли показать, что тепловой импульс распространяется в этой области только в результате диффузии с приблизительно однородным коэффициентом электронной теплопроводности. Принимая во внимание то обстоятельство, что возмущение температуры внутри поверхности $q=1$ отрицательно, а вне ее положительно, Солар [1] показал, что теплопроводность, выведенная из наблюдений мягкого рентгеновского излучения, в пределах погрешностей измерения близка к значению, полученному из рассмотрения глобального удержания энергии.

Итак, видно, что существует по крайней мере одна согласованная модель, объясняющая большую часть экспериментальных наблюдений по пилообразным колебаниям, которая может исполь-

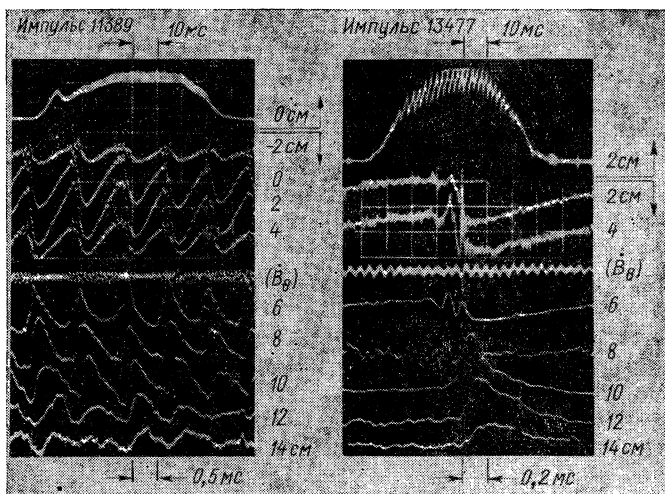


Рис. 11.2. Осциллограммы сигнала мягкого рентгеновского излучения пилообразных колебаний на разных радиусах. Расположение детекторов показано на рис. 1.6 [2]

зоваться для предсказания их поведения в широком диапазоне параметров. Вообще говоря, считается, что пилообразные колебания сами по себе сравнительно безвредны, так как они перемещают только центральную часть плазмы, оставляя ее край почти нетронутым. Однако, если пилообразные колебания играют роль в возникновении неустойчивости большого срыва (см. § 11.3) или становятся слишком большими, они могут оказаться опасными.

Существующей теорией не объясняется пока, по крайней мере две особенности пилообразных колебаний. Еще не полностью ясно, чем определяется положение поверхности $q=1$ внутри плазмы и почему оно остается зафиксированным во время пилообразных колебаний. Кроме того, все еще остается спорным вопрос о частоте вращения винтовой структуры $m=1, n=1$; возможно, это происходит вследствие диамагнитных эффектов [в основном из-за члена Холла в (2.2.16) или ионной вязкости] или связано с вращением тора как целого. Этот вопрос будет обсуждаться в § 11.2, посвященном колебаниям Мирнова.

Вопрос 11.1.1. Каков максимально возможный радиус поверхности $q=1$ при заданном значении q на границе плазмы?

Вопрос 11.1.2 [3, 8]. Пусть $S(r)$ — функция распределения источников мягкого рентгеновского излучения. Предположим, что пилообразные колебания меняют $S(r)$ ее из параболической формы $S(r) \approx S_0(1-r^2/b^2)$, где b — величина, меньшая радиуса плазмы, в плоскую зависимость в области $0 < r < c$, так что среднее по объему от $S(r)$ сохраняется, а также сохраняется $S(r_s)$ на поверхности $q=1$. Каково значение c по отношению к r_s ?

§ 11.2. КОЛЕБАНИЯ МИРНОВА

В настоящее время считается, что колебания Мирнова являются результатом нелинейного насыщения магнитных островов, созданных резистивной тиринг-модой, как это показано в § 10.2. Сильным аргументом в пользу этой модели является пространственная структура, наблюдаемая по сигналу мягкого рентгеновского излучения из области между поверхностью $q=1$ и краем плазмы. Анализ сигнала мягкого рентгеновского излучения, сделанный фон Гелером [11], согласуется с предположением об уплощении профиля температуры внутри винтового магнитного острова, имеющего почти стационарную ширину в несколько десятых радиуса плазмы или менее. Сечение этого профиля температуры показано на рис. 11.3. В этой области из расчетов Уайта и др. [12] следует ожидать нелинейного насыщения ширины магнитного острова, созданного тиринг-модой, в соответствии с уравнениями (10.2.32)—(10.2.34). Возмущенный ток в этих островах течет параллельно винтовой оси острова, причем в положительном направлении в О-точке и в отрицательном направлении в х-точке, как показано на рис. 10.3. Возмущения магнитного поля, вызванные этими винтовыми токами, и регистрируются на краю плазмы как колебания Мирнова.

Вопрос 11.2.1 [11]. Предположим, что функция распределения источников рентгеновского излучения имеет пик в центре плазмы и уплощена внутри каждого острова, как показано на рис. 11.3. Каким будет сигнал детекторов рентгеновского излучения, направленных вдоль различных хорд плазмы, если вся структура вращается вокруг центра плазмы?

Устойчивость и инкремент тиринг-моды довольно чувствительны к профилю тока в плазме (через параметр Δ' , использованный в § 10.2—10.4). Например, при сокращении токового канала должна наблюдаться, как показал Резерфорд [13], последовательность тиринг-мод с $m=4$, $m=3$, $m=2$ и $m=1$. Это согласуется с последовательностью колебаний Мирнова, наблюдаемой во время начальной стадии разряда в токамаке, как показано на рис. 1.5.

Существует несколько моделей, предсказывающих скорость вращения винтовых структур, соответствующих колебаниям Мирнова. Одну модель, основанную на эффекте Холла, впервые предложил Уэйр [14]. Грубо говоря, эффект Холла появляется в законе Ома (2.6.16) в виде

$$\mathbf{E} \sim -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}/ne \sim -\mathbf{v}_i \times \mathbf{B} + (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \times \mathbf{B} \sim -\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}, \quad (11.2.1)$$

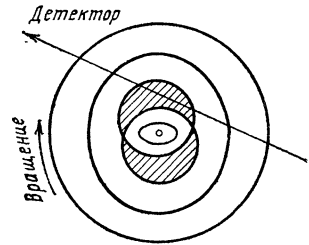


Рис. 11.3. Вращающаяся островная структура $m=2$ и луч зрения детектора рентгеновского излучения. См. вопрос 11.2.1

так что из закона Фарадея

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \sim \nabla \times (\mathbf{v}_e \times \mathbf{B})^{-1} \quad (11.2.2)$$

следует, что силовые линии магнитного поля движутся с электронной скоростью v_e , а не со скоростью жидкости или ионной скоростью $v \sim v_i$. В действительности рассуждения несколько более сложны, так как полный эффект Холла учитывает давление электронов и ионов раздельно. Однако уже это простое рассуждение указывает, что движение силовых линий должно выделяться как тороидальное вращение магнитных островов в направлении потока электронов. Это в грубых чертах и наблюдается в экспериментах. Вывод о тороидальном, а не полоидальном вращении следует из наблюдений того, что в условиях, когда одновременно присутствуют комбинации $m=2, n=1$ и $m=3, n=1$, моды часто зацепляют свои фазы. Розерфорд и Фюрт [15], а также Глассер, Грин и Джонсон [16] с помощью более сложного анализа установили, что островная структура должна вращаться приблизительно с частотой электронного диамагнитного дрейфа, что также согласуется с экспериментальными наблюдениями. Наконец, третья возможность заключается в том, что вращение острова меняется под действием тороидального вращения плазмы как целого, что предсказали и экспериментально обнаружили Сигмар и др. [17]. Однако сравнение между наблюдаемым вращением и теоретическими предсказаниями в некоторой степени усложняется тем фактом, что вращение колебаний Мирнова можно совсем остановить, налагая резонансное винтовое магнитное поле внешних обмоток, описанных в § 11.3.

Очевидно, что для того, чтобы можно было сделать более убедительное сравнение теории и эксперимента, необходимо получить из эксперимента точные профили и использовать в теоретических предсказаниях эти реальные профили.

§ 11.3. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СРЫВА

Замечательный эксперимент по неустойчивостям срыва был выполнен на токамаке «Пульсатор» в Гаршинге (ФРГ). Этот токамак оборудован системой винтовых обмоток $m=2, n=1$, окружающих плазму. По мере увеличения тока в этих винтовых обмотках прежде всего прекращается вращение колебаний Мирнова, а появление неустойчивости срыва на значительное время задерживается, хотя плазма во всех других отношениях была близка к срыву (рис. 11.4). Из аналогичных экспериментов на токамаке АТС в Принстоне было установлено, что изменяется именно вращение колебаний Мирнова, а не их амплитуда, так как после выключения винтового поля колебания восстанавливаются при их обычной амплитуде. Если вернуться к экспериментам на «Пульсаторе», то было установлено, что, если внешние винтовые токи увеличивать дальше, наблюдается четкий порог, на котором запускается неустойчивость срыва, даже в разрядах, которые в обыч-

ных условиях не приводят к срыву.

Следовательно, наложенное винтовое магнитное поле может либо задержать, либо запустить неустойчивость срыва, в зависимости от амплитуды этого поля.

Объяснение такому поведению предложили Лакнер и Каргер [20]. Их работа основана на предположении, что неустойчивость срыва начинается, когда магнитный остров $m=2$, $n=1$ внутри плазмы становится слишком широким. Остров $m=2$ взаимодействует с диафрагмой или с островом $m=1$, связанным с пилообразными колебаниями, а также с другими островами $m>2$, $n\geq 1$, что будет описано более подробно позже. Наложное извне винтовое поле приводит к образованию острова $m=2$ с контролируемой шириной в противоположность естественному острову, вызванному тиринг-модой. Если искусственный остров получился очень широким, он взаимодействует с диафрагмой, охлаждая край плазмы и заставляя ток протекать в таком узком канале, что при этом в большой области становится неустойчивой мода $m=1$, вызывая тем самым срыв. Если искусственный остров сделать меньше, он уплощает профиль тока на поверхности $q=2$ и уменьшает там шир, так что тиринг-мода $m=2$, $n=1$ растет более медленно, затягивая при этом срыв. Естественный срыв происходит только тогда, когда параметры плазмы позволяют острову тиринг-моды $m=2$ стать слишком широким.

Предположение о том, что неустойчивость срыва вызывается магнитным островом $m=2$, взаимодействующим с другими структурами внутри плазмы, было высказано многими авторами и получает все большее подтверждение, основанное на экспериментальных данных («Пульсатор» [19], TFP [21]). Например, детальный анализ сигнала мягкого рентгеновского излучения, продельанный фон Гелером [11], установил, что неустойчивость срыва начинается с уплощения температуры на поверхности $q=2$, которое распространяется от нее в обоих направлениях и сопровождается через 200 мкс отрицательным выбросом на напряжении. Многочисленные измерения с помощью магнитных зондов, сделанные на менее крупном токамаке LT-3 Хатчинсоном [22], показали, что расширение профиля тока начинается между поверхностями $q=2$ и $q=1$, как показано на рис. 11.5. Непосредственно перед срывом в магнитном сигнале на краю плазмы развивается сильное возмущение $m=2$, которое быстро превращается в более сложное возмущение, как показано на рис. 11.6, в работе с соавт. [24].

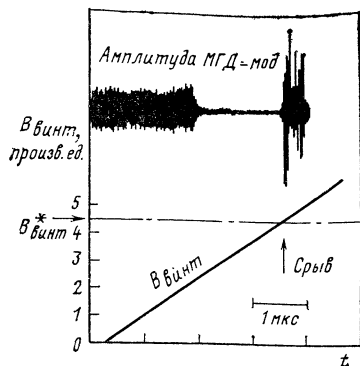


Рис. 11.4. Наложное винтовое магнитное поле в токамаке «Пульсатор» сначала останавливает вращение колебаний Мирнова, а затем вызывает неустойчивость срыва [19]

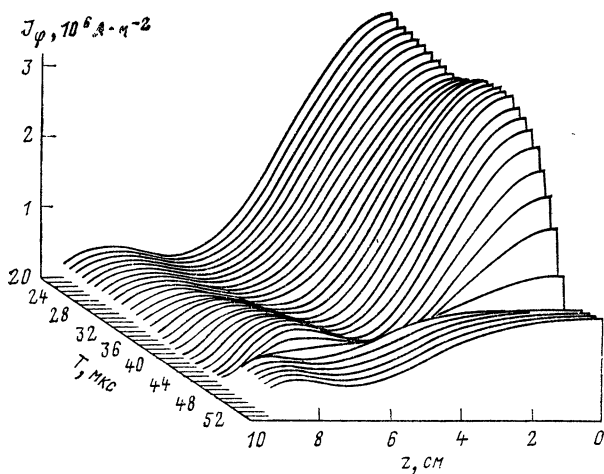


Рис. 11.5. Временная эволюция плотности продольного тока как функции малого радиуса z во время неустойчивости срыва на токамаке LT-3 в Канберре (Австралия) [22]

Магнитные острова могут взаимодействовать друг с другом несколькими способами. Наиболее сильный тип взаимодействия происходит, когда острова перекрываются. Вычисления Финна [25] показывают, что когда магнитные острова тесно сводятся вместе, между взаимодействующими островами образуется кольцеобразная область, заполненная эргодически (т. е. хаотически) блуждающими силовыми линиями, которая быстро расширяется и заполняет всю область перекрытия островов. Временная зависимость этого процесса пока неполностью ясна. Даже если острова находятся довольно далеко, всюду, где фурье-компоненты комбинационного возмущения резонируют с *локальной* величиной q в острове, в первоначальных островах формируются вторичные островки. Речестер и Стикс [26] показали, что эти вторичные островки скапливаются в пограничном слое около сепаратрисы исходного острова и пограничный слой быстро расширяется при увеличении взаимодействия. В дополнение к этому взаимодействию острова с током могут притягиваться друг к другу, причем наиболее сильно в области около внешнего края тора, где они расположены ближе [19, 27]. В этих областях за счет процесса перезамыкания силовых линий, которое происходит из-за конечной проводимости плазмы, острова сливаются вместе с наибольшей вероятностью.

Первым эффектом перезамыкания силовых линий должна быть потеря держания быстрых убегающих электронов. Этот эффект действительно наблюдается в виде вспышек жесткого рентгеновского излучения в первом из серии срывов. Второй эффект перезамыкания силовых линий состоит в быстром расширении профиля электронной температуры, так как электронная теплопроводность вдоль магнитных силовых линий чрезвычайно высока (2.6.19). Этот эффект проявляется при наблюдении мягкого рентгеновского излучения. Наконец, профиль тока также расширяется.

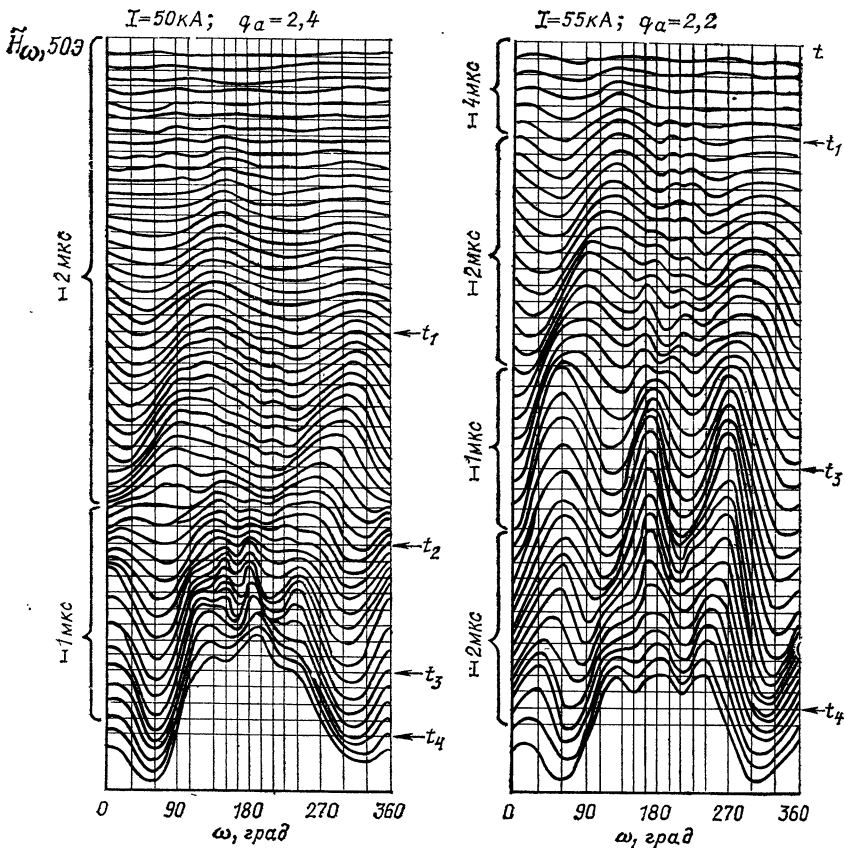


Рис. 11.6. Временная зависимость возмущения полоидального магнитного поля как функция полоидального угла ω , отсчитываемого от внешнего края тора, наблюдаемая при неустойчивости срыва в токамаке Т-6 в ИАЭ им. И. В. Курчатова (Москва). Шкала времени идет сверху вниз. Слева указаны соответствующие интервалы времени [24]

Недавняя теория, развитая Каррерасом, Вадделом, Хиксом [28], установила, что достаточно сильная тиринг-мода $m=2$, $n=1$ может нелинейным образом вызывать другие тиринг-моды с нечетными гармониками (например, $m=3$, $n=2$ или $m=5$, $n=3$) с взрывообразным ростом. Выбросы возмущения объемного тока, связанные со всеми этими островами от тиринг-мод, приводят к вторичному эффекту расширения профиля полного тока. Подобный этому механизм необходим для объяснения наблюдающегося быстрого расширения профиля тока, которое нельзя объяснить диффузией магнитного поля, начинающейся вслед за расширением профиля электронной температуры.

Если плазма выдерживает срыв, то эти выбросы тока, по-видимому, расплываются и затухают из-за конечной проводимости, приводя к новому осесимметричному равновесию.

Эффект расширения профилей состоит в уменьшении $\beta_{\text{пол}}$ и внутренней индуктивности, так что тороидальная плазма заталкивается внутрь приложенным вертикальным полем (4.7.12). Комбинированный эффект увеличения малого радиуса и уменьшения большого радиуса токового канала вызывает некоторое увеличение продольного тока и большой отрицательный выброс на напряжении (см. вопрос 1.2.3). Уменьшение полоидального поля около центра плазмы наводит там большое положительное электрическое поле. Хатчинсон [22] предположил, что это электрическое поле ускоряет небольшое число ионов до очень больших энергий и эти ионы постепенно уходят из плазмы.

Теперь видно, что основные процессы, по-видимому, уже идентифицированы, но полное описание временного развития неустойчивости срыва следует еще разработать более детально. Трудно составить полную картину, так как неустойчивость срыва происходит слишком неожиданно и непредсказуемо после каких-то внутренних перераспределений. Замечательно, что удалось сделать такие подробные экспериментальные измерения. Сейчас работы по изучению срывов, которые возникают, как описывалось в § 1.2, в самых различных условиях, продолжаются.

§ 11.4. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Пилообразные колебания рассмотрены в статьях:

1. Jahns G. L., e. a. — Nucl. Fusion, 1978, v. 18, p. 609—628.
 2. Callen J. D., Jahns G. L. — Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 491—494.
 3. Кадомцев Б. Б. — Физика плазмы, 1975, т. 1, с. 710.
 4. Waddell B. V. e. a. — Nucl. Fusion, 1976, v. 16, p. 528—532.
 5. Sykes A., Wesson J. A. — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 37, p. 140—143.
 6. Furth H. P. e. a. — Phys. Fluids, 1970, v. 13, p. 3020—3030.
 7. TFR Group (D. Launois). — In: 7th Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Lausanne, 1975, v. 2, p. 1—13.
 8. Smith R. R. — Nucl. Fusion, 1976, v. 16, p. 225—229.
 9. TFR Group. Report CEA-FC-832 Fontenay-aux-Roses, France, 1976; IAEA Berchtesgaden Conf., 1976, v. 1, p. 279—287.
 10. W-VII A Stellarator team. IAEA Berchtesgaden Conf., 1976, v. 2, p. 81—93.
- По теории колебаний Мирнова см. литературу по тиринг-модам в гл. 10, а также
11. Von Goeler S. — In: 7-th Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Lausanne, 1975, p. 71—80.
 12. White R. B. e. a. — Phys. Fluids, 1977, v. 20, p. 800—805.
 13. Rutherford P. H. — Phys. Fluids, 1973, v. 16, p. 1903—1908.
 14. Ware A. A. — In: IAEA Salzburg Conf., 1961; Nucl. Fusion Suppl., 1962, v. 3, p. 869—876.
 15. Rutherford P. H., Furth H. P. Report MATT-872, Princeton, 1971.
 16. Glasser A. H., Greene J. M., Johnson J. L. — Phys. Fluids, 1976, v. 19, p. 567—574.
 17. Sigmar D. J. e. a. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 1376—1379.
 18. Bol K. e. a. — IAEA Tokyo Conf., 1974, v. 1, p. 83—97.
- Неустойчивость срыва изучалась в работах:

19. Karger F. e. a. (Pulsator group) — In: IAEA Tokyo Conf., 1974, v. 1, p. 207—213; IAEA Berchtesgaden Conf., 1976, v. 1, p. 267—277.
20. Lackner K., Karger K. Stabilization of the Disruptive Instability by Resonant Helical Winding, Garching, 1976.
21. Equipe TER. — Nuclear Fusion, 1977, v. 17, p. 1283—1296.
22. Hutchinson I. H. — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 31, p. 338—341.
23. Albert D. B., Morton A. H. — Nucl Fusion, 1977, v. 17, p. 863—868.
24. Власенков В. С. и др. — In: IAEA Tokyo Conf.; Nucl. Fusion Suppl., 1974, p. 1—5.
25. Finn J. M. — Nucl. Fusion, 1975, v. 15, p. 845—854.
26. Rechester A. B., Stix T. H. — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 587—591.
27. Кадомцев Б. Б. — In: IAEA Berchtesgaden Conf., 1976, v. 1, p. 555—565.
28. Carreras B., Waddeell B. V., Hicks H. R. Report ORNL/TM-6096, Oak Ridge, 1977.

Рамки книги не позволяют сделать сравнение теории и экспериментальных наблюдений по винтовой неустойчивости $m=1$. Хорошее согласие получено в работах:

29. Bodin H. A. B. e. a. — Phys. Fluids, 1970, v. 13, p. 2735—2746.
30. Thomas K. S. — Phys. Fluids, 1972, v. 15, p. 1658—1666.
31. Friedberg J. P. — Phys. Fluids, 1970, v. 13, p. 1812—1818.
32. Funfer E. e. a. IAEA Madison Conf., 1971, v. 3, p. 189—200.
33. Kruskal M. D. e. a. — Phys. Fluids, 1958, v. 1, p. 421—429.

Много статей, посвященных стабилизации винтовой моды $m=1$, было представлено на Женевскую конференцию, 1958 г.

В экспериментах по ударному нагреву стабилизация моды $m=2$ ларморовским радиусом была продемонстрирована в работе

34. Neuhauser J. e. a. — Nucl. Fusion, 1977, v. 17, p. 3—12.

Наконец, эффект неустойчивости типа перегибок $m=0$ был исследован в работе

35. Anderson O. A. e. a. — Phys. Rev., 1958, v. 110, p. 1375—1387.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. КОММЕНТАРИИ К ВОПРОСАМ

Цель приведенных комментариев — помочь читателю ответить на появляющиеся в основном тексте вопросы, пронумерованные в соответствии с номерами разделов книги. В большинстве случаев для ответа требуются лишь простое понимание и простейшие выкладки. Однако в некоторых случаях, чтобы несколько расширить содержание основного текста и пробудить интерес к дальнейшему изучению данной области физики плазмы, встречаются и более сложные вопросы. Возможно, что с моими ответами согласится не каждый.

1. Введение

1.1.1. Давление $nT=0,16$ Дж/см²=1,6 ат и соответствует магнитному полю 0,63 Тл. Конструкцией воспринимается только давление на границе шнура. Для тороидальной плазмы при указанных здесь условиях на конструкцию воздействует только сила растяжения, рассмотренная в § 4.7.

1.1.2. $B_{\text{тор}}=9$, $B_{\text{пол}}=5,7$ Тл, что соответствует давлению примерно 130 ат, действующему на катушки. Сделать катушки метрового радиуса для создания такого поля можно, но очень трудно.

1.2.1. Сумма электродвижущих сил по каждому замкнутому контуру равна сумме падений напряжений IR , связанных с током и сопротивлением. Для замкнутой проволоочной петли, обладающей полным сопротивлением R , уравнение $-d\Phi/dt=IR$ определяет ток I . Для замкнутой цепи, состоящей из вольтметра и ближайшего к нему отрезка петли с сопротивлением R_1 , произведение $V=IR_1$ определяет измеренное напряжение. То же напряжение получается, если рассмотреть цепь, состоящую из вольтметра и дальнего отрезка петли R_2 :

$$-d\Phi/dt = IR_2 + V, \text{ где } R_1 + R_2 = R.$$

1.2.2. Электродвижущая сила приложена к разрезам в проводящей оболочке, а омическое падение напряжения распределено по плазме непрерывно. Если проводимость осесимметрична, то плазма является осесимметричной.

1.2.3. Если распределение тока внутри радиуса a (эффективного радиуса плазмы) было бы однородным, то магнитная энергия цилиндрического плазменного шнура длины $2\pi R$ была бы равна

$$(1/2\mu) \int d^3x B^2 = (\mu I^2/2) [1/4 + \ln(R/a)] R.$$

Предположим, что $a \rightarrow a + \delta$, $R \rightarrow R - \Delta$. Тогда изменение магнитной энергии равно

$$\mu I^2/2 \left\{ -\left(\frac{1}{4} + \ln(R/a)\right) \Delta - \Delta - \delta R/a + \dots \right\}.$$

Следовательно, увеличение a и уменьшение R уменьшают магнитную энергию тока плазмы; плазма работает на трансформатор.

1.2.4. С точностью до множителя поле вне плазмы в данном примере не зависит от r_0 , и поэтому нет возможности определить радиальное распределение тока в мультиполе по измерениям внешнего магнитного поля. Это легче всего продемонстрировать на прямой мультиполюсной конфигурации (в приведенном примере $k=0$).

2. МГД-уравнения

2.2.1. Силовые линии, которые замыкаются сами на себя, находятся во взаимно однозначном соответствии с рациональными числами, в то время как силовые линии, которые не замыкаются на себя (и эргодически заполняют поверхность), соответствуют иррациональным числам. Следовательно, фактически 100 % силовых линий незамкнуты.

2.2.2. Эта задача аналогична отысканию скорости в какой-то области по заданному ротору ($\omega = \nabla \times v$). Однородный ротор соответствует твердотельному вращению. Но где ось вращения? Для устранения неоднозначности существенны граничные условия.

2.2.3. Скорость в уравнении (2.2.8) означает скорость системы отсчета, в которой $\mathbf{E}=0$. Она не совпадает с электронной или ионной скоростями.

2.3.1. Если тор находится в вакууме, то новое магнитное поле вокруг тора будет дипольным, которое полностью отделено от локального поля между полюсами. В вакуумной области силовые линии могут разрываться и перезамыкаться, так как в вакууме вдоль произвольного замкнутого контура может существовать электродвижущая сила.

Если же тор окружен идеально проводящей жидкостью, то силовые линии не могут разрываться и перезамыкаться и магнитное поле должно выходить из одного полюса, входить в тор и возвращаться назад. Тор сопротивляется попыткам вытянуть его из магнита и по мере его вытягивания энергия магнитного поля растет.

Если первоначально в торе не было тока, то при вытягивании он возникает так, чтобы поток остался неизменным. В пределе нулевого сопротивления уже бесконечно малая электродвижущая сила достаточна для возбуждения тока.

2.3.2. Поскольку течение жидкости не является непрерывным в том смысле, что первоначально близкие элементы жидкости перестают быть близкими, магнитное поле может изменить топологию.

2.3.3. Когда магнитное поле сдвигается в сторону, энергия, запасенная в магнитном поле, увеличивается за счет кинетической энергии маятника. Если кинетической энергии достаточно, чтобы сжать магнитное поле вокруг маятника, он будет продолжать движение и восстановит свою кинетическую энергию, когда магнитное поле восстановит свою первоначальную форму.

2.3.4. При движении ионизованного газа сквозь магнитное поле Земли в ионосфере возникает электрическое поле.

2.4.1. Поперечное магнитное давление равно

$$-\frac{1}{2\mu} \nabla_{\perp} B^2 = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{2\mu} \frac{\partial}{\partial r} B^2(r),$$

а натяжение, связанное с кривизной магнитного поля, равно

$$\frac{1}{\mu} B^2 \mathbf{k} = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{\mu r} B_0^2(r).$$

Если J_z и B_z однородны, оба вклада равны. Изменение профиля B_z меняет только вклад магнитного давления — диамагнетизм увеличивает его, а парамагнетизм уменьшает.

Если профиль J_z пикирован в центре, вклады равны нулю в центре $r=0$, при удалении от $r=0$ магнитное давление падает быстрее, чем магнитное натяжение.

2.4.2. Любое магнитное поле должно быть бездивергентным: $\nabla \cdot \mathbf{B}=0$. Поле, о котором идет речь в вопросе, не удовлетворяет этому условию.

2.5.1. Общее выражение для сохранения углового момента можно найти в книге Джексона (Классическая электродинамика. Пер. с англ. М., Мир, 1965). Локальный момент, действующий на плазму, равен

$$\nabla \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{J} - \mathbf{J} \cdot \nabla \mathbf{B}.$$

2.5.2. Наличие циркуляции вектора Пойнтинга $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ вокруг оси диска означает, что у электромагнитного поля есть момент. При исчезновении магнитного поля он переходит в угловой момент диска.

2.6.1. Если в закон Ампера включить ток смещения $\mathbf{J} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, то $\nabla \cdot \mathbf{J}$ больше не будет равно нулю и уравнения станут согласованными. Без тока смещения у нас не будет сохранения заряда.

3. Неустойчивость Рэлея—Тейлора

3.1.1. Положим локальное $v_y \sim \exp(ily)$, или более точно, возьмем ВКБ-приближение. Тогда при

$$l \gg \left| \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right|, \quad l \sim \frac{k}{\gamma} \left(\frac{g \rho' - \rho \gamma^2}{\rho} \right)^{1/2}.$$

При $\gamma=0$ существует точка сгущения. Если γ мало, решения могут быть локализованными (в смысле быстрых осцилляций по y) на любом уровне, где $\rho'(y) > 0$.

3.1.2.

$$v_y(y) = \sin\left(\frac{\pi n y}{L}\right) \exp(-y/2\lambda);$$

$$\gamma^2 = \frac{g}{\lambda} \frac{k^2}{k^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2}.$$

Случай $n=1, k \rightarrow \infty$ наиболее неустойчив.

3.1.3.

$$v_y(y) = \begin{cases} v_y(0+) \operatorname{sh} k(a-y) / \operatorname{sh}(ka), & y > 0; \\ v_y(0-) \operatorname{sh} k(b+y) / \operatorname{sh}(kb), & y < 0; \end{cases}$$

$$\gamma^2 = \frac{k g (\rho_+ - \rho_-)}{\rho_+ \operatorname{cth}(ka) + \rho_- \operatorname{cth}(kb)}.$$

Такая задача математически поставлена не совсем корректно, так как разрывные возмущения ($k \rightarrow \infty$) нарастают бесконечно быстро. Эту математическую трудность можно устранить, учитывая в модели вязкость, поверхностное натяжение или другие эффекты неидеальности. Тогда длины волн наиболее быстро растущих неустойчивостей будут определяться добавленными эффектами.

3.1.4. Уравнение в частных производных (3.1.8) — это не что иное, как уравнение Эйлера для вариационной формы (3.1.10). Поэтому уравнение (3.1.8) применяется только для отыскания экстремума вариационной формы. Для заданного набора граничных условий каждое решение уравнения Эйлера представляет собственную функцию, соответствующую одному и только одному собственному значению γ . Допустимые пробные функции в вариационной форме могут быть, однако, смесью собственных функций, так что γ^2 в (3.1.10) может быть суммой собственных значений с произвольными коэффициентами.

3.1.5. Да, но в (3.1.10) будут существовать дополнительные поверхностные члены.

3.1.6. При использовании модели экспоненциальной плотности, как в вопросе 3.1.2, когда ускорение g постоянно на всем временном интервале, для смещения

$$\xi(\mathbf{x}, t) \equiv \int_0^t dt v(\mathbf{x}, t) \quad \text{имеется автомодельное решение } \xi = \xi(t=0) \exp(\gamma t),$$

$\gamma = \sqrt{g/\lambda}$. Очевидно, если g зафиксировать, а временной интервал уменьшать, то результирующее смещение будет уменьшаться. Даже если ускорение g увеличивать, чтобы зафиксировать конечную скорость (или кинетическую энергию) при уменьшении временного интервала $v_{\max} = g t_{\max}$, результирующее смещение будет уменьшаться. Следовательно, чтобы ограничить амплитуду, надо сжимать как можно быстрее.

3.3.1. Да. Это можно продемонстрировать на частном примере:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{v};$$

$$\mathbf{v} = v_y \sin(kx) \hat{\mathbf{y}};$$

$$\mathbf{B}(t=0) = B_{x_0} \hat{\mathbf{x}}.$$

3.3.2.

$$\gamma^2 = \frac{k(\rho_+ - \rho_-)g - [(kB_+) ^2 \operatorname{cth}(ka) + (kB_-) ^2 \operatorname{cth}(kb)]}{\rho_+ \operatorname{cth}(ka) + \rho_- \operatorname{cth}(kb)}.$$

3.3.3. При заданной длине маятника условиями устойчивости как обращенного, так и обычного маятника являются

$$\sqrt{2gl}/\omega < a \ll l, \quad \omega > 2\sqrt{g/l},$$

где a — амплитуда; ω — вынуждающая частота. Эти условия можно также рассматривать как ограничения на длину:

$$\frac{\sqrt{2gl_{\max}}}{\omega} < a < l_{\min}, \quad \omega > 2\sqrt{g/l_{\min}}.$$

Более полная теория позволяет устранять ограничения $a \ll l$.

4. МГД-равновесие

За исключением конфигураций с высокой степенью симметрии, уравнению $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla p$ могут удовлетворять только отдельные частные случаи магнитных полей. Возьмем в качестве простого примера однородное магнитное поле B_x с током J_z , проходящим через круглое сечение. Даже если выполнить условия баланса сил внутри тока, они не будут удовлетворяться на границе тока.

4.2.1. Системы открытого типа основаны на том, что в них $p_{\parallel} \neq p_{\perp}$, т. е. давление не скалярное.

4.3.1. Нет. Для силовой линии на внутренней стороне тора $q = \lim_{n \rightarrow \infty} (n/0) = \infty$

где n — число обходов вдоль тора. Для других силовых линий, которые охватывают внешний обвод той же поверхности, $q = \lim_{n \rightarrow \infty} (n/1) = \infty$.

4.3.2. Для всех приложений, необходимых нам, значением q на магнитной оси можно считать предел q в непосредственной близости от оси.

4.4.1. Из-за зависимости от главного радиуса в замкнутой тороидальной области не существует тривиального решения $R^2 p'(\psi) + II'(\psi) = 0$. Как будет видно из § 4.7, для тороидального равновесия необходимо по крайней мере вертикальное поле. Более общее доказательство необходимости приложенных извне полей дано на основе теоремы вириала Шафрановым (В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 2. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Госатомиздат, 1963, с. 95).

4.4.2. Нет. Простое доказательство содержится в статье в Nucl. Fusion, Supl. A, 1973, v. 13, p. 593.

4.4.3. Магнитная ось в $R=R_0$ смещена относительно центра между крайними радиусами плазмы $R_{\pm} = R_0 \sqrt{1 \pm X}$, $y=0$, где $X = [(\psi_0 - \psi_{\text{кр}}) / \alpha R_0^2 \psi_1]^{1/2}$. Полоидальное поле с обеих сторон одно и то же. Вблизи магнитной оси может быть некоторая вытянутость. Для анализа возможной вытянутости вдали от магнитной оси нужно учитывать сепаратрису. Для нескольких различных случаев это сделано Л. С. Соловьевым (В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 6. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1972, с. 210).

4.5.1. Вопрос состоит в том, всегда ли можно расположить внешние обмотки вдоль охватывающего плазму круглого тора. Если нет, то есть разница между сдавливанием и вытягиванием. Например, когда для сдавливания боков плазмы используются плоскости с токами, как на рис 4.6, б, то эти плоскости должны быть очень близко к плазме. Чтобы поддерживать вытянутость плазмы, сингулярности в магнитном поле, соответствующие токам отражения, должны быть очень близко к плазме.

4.5.2. Если квадрупольное поле слишком велико, то равновесие отсутствует — плазма просто разрывается, даже в отсутствие затравочного возмущения. Сильновытянутые конфигурации неустойчивы по отношению к стягиванию или дальнейшему вытягиванию.

4.6.1. В пределе бесконечно тонкого токового слоя градиенты магнитного и термодинамического давления становятся бесконечными, в то время как натяжение, связанное с кривизной магнитного поля, остается конечным.

4.6.2. Равновесие определяется уравнением

$$B_{\text{пол}}^2(\theta) = \frac{B_{\varphi \text{ внутр}}^2 - B_{\varphi \text{ внешн}}^2}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + 2\mu p,$$

где $\varepsilon = a/R$.

Минимальное полоидальное поле достигается, когда $B_{\text{пол}}(\theta = 180^\circ) = 0$. При этих условиях $\beta_{\text{пол}} \equiv 2\mu p / B_{\text{пол}}(\theta = \pi/2) = 1/(2\varepsilon - \varepsilon^2)$. При этом для заданного $q_0 = \varepsilon B_{\varphi} / B_{\text{пол}}|_{\theta = \pi/2}$ максимальная величина возможного β равна

$$\beta \equiv 2\mu p / B_{\varphi \text{ внешн}}^2 \approx \varepsilon / 2q^2.$$

4.6.3. Полоидальный поток между плазмой и стенкой на единицу длины равен $\psi = B_{\text{пол}} a \ln(w/a)$. При фиксированном $B_{\text{пол}}$ этот поток равен нулю при $a=0$ и $a=w$, где a — радиус плазмы, а w — радиус стенки. Поток максимален при $a/w = 1/e$. Поток между вытянутой плазмой и стенкой $\psi = B_{\text{пол}}(w-a)$ достигает того же максимума при $a/w = 1 - 1/e$.

4.7.1. Радиальная сила, необходимая для равновесия, одна и та же, независимо от того, производится ли работа над внешним контуром при смещении или только над плазмой. Сила, связанная с вертикальным полем, рассматривается независимо.

4.7.2. Используя (4.7.12) и то, что $B_{\text{пол}} \approx \mu I_{\text{тор}} / 2\pi a$, $l_i \sim 1$, находим $\beta_J \approx 2/\varepsilon$, $\varepsilon \equiv a/R$, где $B_y = B_{\text{пол}}$ на внутренней стороне тора. Это приводит к ограничению $\langle \beta \rangle \approx \beta_J B_{\text{пол}}^2 / B_{\text{тор}}^2 \leq 2\varepsilon / q^2$. Если давление и вертикальное поле увеличивать дальше, то сечение плазмы уменьшается, так что $\langle \beta \rangle$ падает.

4.7.3. Давление может повышаться неограниченно, если не будет взаимного вычитания B_y и $B_{\text{пол}}$, а следовательно, и сепаратрисы. В частности, вертикальное поле должно быть искривлено наружу, так чтобы на внутренней стороне тора оно было слабое. Обеспечение вертикальной устойчивости требует при этом полей довольно сложной конфигурации.

4.7.4. Этот вопрос остается открытым. Если рассмотреть дрейф отдельных несталкивающихся частиц в тороидальной плазме с вращательным преобразованием, то наличие вертикального поля только в одном квадранте представляется приемлемым. Экспериментаторы отмечают, что это поле должно быть в 4 раза сильнее, чем обычное несимметричное поле*.

4.7.5. Условие сохранения потока и энтропии увеличивает при смещении внутри радиальную силу и уменьшает при смещении наружу. Это должно увеличивать устойчивость по горизонтали.

4.7.6. Сохранение вертикального потока через отверстие тора препятствует полному перевороту. При выполнении условий устойчивости по вертикали малые смещения шнура, соответствующие перевороту как целого, стабилизируются, а условие $q > 1$ стабилизирует также винтовое возмущение $m=1$, которое выглядит как начало переворота шнура.

5. Линеаризованные уравнения и энергетический принцип

5.1.1. а. Это возмущение вообще безвредно, но при математическом анализе оно формально считается нейтрально устойчивым.

б. Это неустойчивость, так как при каждом колебании плазма отходит все дальше от состояния равновесия.

в. Как старое, так и новое равновесие устойчивы, поскольку возмущение не уводит из этого состояния.

г. Конвективные ячейки представляют устойчивое динамическое равновесие.

д. Турбулентное состояние в большей части времени не является равновесным, а любое мгновенное равновесие в нем является неустойчивым.

* При наличии сильного продольного поля равновесие тороидальной плазмы определяется усредненным по длине тора вертикальным полем. Отсюда следует упомянутый коэффициент 4. Несимметрия вертикального поля приводит лишь к небольшому изгибанию шнура в вертикальном направлении (см. [6, гл. 4]). — *Примеч. ред.*

5.2.1. Из трех компонентов магнитного поля только два являются независимыми, так должно соблюдаться равенство $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Следовательно, исходные МГД-уравнения эквивалентны системе шестого порядка.

5.3.1. Отправляясь от (2.5.4), запишите полное возмущение второго порядка. Теперь запишите возмущение второго порядка для МГД-уравнений (2.1.3)–(2.1.5) и найдите временные производные возмущения второго порядка для давления p^2 и магнитного поля $\mathbf{B}^{(2)}$. Найдите также $\partial \mathbf{V}^1 / \partial t$ и получите уравнение (5.3.3), используя векторные тождества, условия равновесия и условие самосопряженности (5.3.2).

5.3.2. Для любого собственного числа γ есть другое собственное число $-\gamma$, соответствующее неустойчивости при обращении времени и собственной функции $(\mathbf{v}, \mathbf{B}, p)_{-\gamma} = (\mathbf{v}, -\mathbf{B}, -p)_{\gamma}$. Каждая неустойчивость в действительности представляет комбинацию этих двух собственных функций

$$(\mathbf{v}^1, \mathbf{B}^1, p^1)(x, t) = (\mathbf{v}, \mathbf{B}, p)_{\gamma} \exp(\gamma t) + (\mathbf{v}, \mathbf{B}, p)_{-\gamma} \exp(-\gamma t),$$

так что $p^1(x, t=0) = 0$, $\mathbf{B}^1(x, t=0) = 0$.

5.3.3. Да, это возмущение представляет состояние, удовлетворяющее равновесному балансу сил, и при спектральном анализе линеаризованных МГД-уравнений выглядит как нейтрально устойчивое возмущение.

5.5.1. Возмущения p^1 и \mathbf{V}^1 растут линейно со временем, а поле скоростей остается постоянным во времени.

6. Неустойчивости круглого цилиндра

6.1.1.

$$q(r) = \frac{2(\nu+1)}{\mu J_0} \frac{r^2}{a^2} \frac{k B_z}{1 - (1r^2/a^2)^{\nu+1}}.$$

6.1.2. На первый взгляд маловероятно, что профиль тока изменяется и в то же время дает то же поле и тот же поток на границе плазмы, хотя это, конечно, возможно. Например, рассмотрим сначала два заданных концентрических поверхностных тока, а затем определим значение и положение одного из поверхностных токов так, чтобы он давал то же поле и тот же поток при заданном положении стенки.

6.2.1. Мода $m=0$ устойчива, если

$$-\frac{d \ln p}{d \ln r} < \frac{\Gamma}{1 + 1/2\Gamma\beta},$$

где $\Gamma = 5/3$, $\beta = 2\mu\rho/B^2$ является функцией радиуса.

6.2.2.

$$\gamma^2 \approx I_z B_z k / \langle \rho \rangle.$$

6.2.3. Возмущение магнитного поля b_x , как следует из закона Фарадея, меняет знак, когда $1/2 J_z = k B_z$. Член $J_z^0 B_x^1$ в уравнении движения и вызывает эту неустойчивость.

6.2.4. В выражении для $\mathbf{J}^1 = \nabla \times \mathbf{B}^1 = \nabla \times [\nabla \times (\xi^1 \times B^0)]$ есть много членов. В условиях несжимаемости $\nabla \cdot \xi = 0$ вблизи резонансной поверхности, где $\mathbf{B} \cdot \nabla \xi$ мало и где $\xi \approx \xi_r \hat{r}$ почти однородно, применимо приближение

$$\mathbf{J}^1 \approx \nabla \times \left(-\xi_r \frac{\partial}{\partial r} B^0 \right) \approx -\xi_r \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{J}^0.$$

Те винтовые неустойчивости, которые локализованы вблизи поверхности плазмы (например, моды $m \geq 2$), полностью подавлены, когда J_z на границе плазмы обращается плавно в нуль на краю плазмы.

6.2.5. Если параллельный равновесному магнитному полю язык возмущения находится в идеально проводящей плазме, то возмущение радиального магнитного поля B_r^1 не может возникнуть, так как была бы составляющая $\mathbf{E}^1 \parallel \mathbf{B}^0$

в (6.2.1). Это может произойти либо в вакууме, либо при конечной проводимости.

6.3.1. Для решений (6.3.5), (6.3.6), которые в непосредственной окрестности радиуса r_s , где $(\rho\gamma^2 + F^2)r \approx Ax$, меняются как $(r\xi_r, p^*) \sim x^\nu$, $x \equiv r - r_s$, получаем $\nu = (C_{11} \pm \sqrt{C_{12}C_{21}})/A$. По поводу сингулярности вблизи границы устойчивости см. вывод критерия Сайдема (6.5.11) — (6.5.16).

6.3.2. Чтобы показать, что $B_r^1 = 0$, воспользуемся интегральной формой закона Фарадея, откуда $\mathbf{E}^1 \cdot \mathbf{V}^0 = 0$. Конечное сопротивление допускает $\mathbf{E}^1 \cdot \mathbf{V}^0 \neq 0$ и, следовательно, $\mathbf{V}_r^1 \neq 0$.

6.4.1. Если допустить, что $\xi \neq 0$ на границе плазмы, то неустойчивости со свободной границей могут более эффективно использовать внутреннюю потенциальную энергию плазмы.

6.5.1. Уравнение Эйлера должно быть решено на отрезках независимо, допуская разрывы в сингулярных точках, как в пробных функциях (6.5.1).

6.5.2. Член, соответствующий стабилизации широм, ведет себя вблизи $r=0$, как r^2 . Неустойчивость уплощает профиль $\rho(r)$ вблизи $r=0$ и тем самым стабилизируется.

6.5.3. Коэффициент при $(\xi')^2$ мал и стремится к нулю, если собственная функция быстро осциллирует по радиусу.

6.6.1. Инкремент внутренней моды $m=1$ очень похож на инкремент моды со свободной границей при той же самой резонансной поверхности*.

6.6.2. Да, могут быть разные собственные функции. Любая собственная функция, однако, изменится, если устранить условие закрепленности границы.

7. Неустойчивости тороидального шнура

7.1.1. Подставляя (7.1.5) в (7.1.3) и интегрируя по θ и ζ , получаем $\lambda(V, \theta, \zeta)$. Вариация магнитной энергии по отношению к λ равна

$$\begin{aligned} \int d^3x \frac{1}{2} \delta(B^2) &= \int d^3x \mathbf{B} \cdot \nabla V \times \nabla \delta\lambda = \\ &= \int d^3x \{ \nabla \cdot (\delta\lambda \nabla V \times \mathbf{B}) + \delta\lambda \nabla V \cdot \nabla \times \mathbf{B} \}. \end{aligned}$$

Первый член после интегрирования дает нуль, а второй член приводит к условию $\nabla V \cdot \mathbf{J} = 0$, т. е. отсутствию тока поперек магнитных поверхностей в состоянии с минимальной энергией.

7.1.2. Прежде всего определим поверхности $\psi = \text{const}$ и интегрированием объем $V(R, y)$, ограниченный этими поверхностями. Функции $\psi_{\text{пол}}(V)$, $\psi_{\text{тор}}(V)$, $I_{\text{пол}}(V)$, $I_{\text{тор}}(V)$ могут быть получены из их определений (4.2.1) — (4.2.4). Затем используем (7.1.7) и (7.1.10) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \nabla \zeta &= \dot{\psi}_{\text{тор}}(V), \quad \mathbf{J} \cdot \nabla \zeta = \dot{I}_{\text{тор}}(V); \\ \mathbf{B} \cdot \nabla \theta &= \dot{\psi}_{\text{пол}}(V), \quad \mathbf{J} \cdot \nabla \theta = \dot{I}_{\text{пол}}(V) \end{aligned}$$

и интегрированием вдоль силовой линии найдем ζ и θ .

7.2.1. В линейной теории относительное различие величин ξ^V , μ и η было бы тем же, а абсолютное значение их не играет роли.

7.3.1. То, что критерий Мерсье для мод, связанных с давлением, дает при низком β , большом аспектном отношении, круглом сечении то же самое условие устойчивости, что и связанные с током $\mathbf{J} \parallel \mathbf{B}$ винтовые моды, является, по-видимому, совпадением. Помимо условия резонанса между возмущением и силовыми линиями, я не вижу никакой глубокой связи.

* Этот ответ непонятен. В действительности инкремент внутренней моды меньше в $B_\theta^2/B_z^2 \ll 1$ раз. — *Примеч. ред.*

7.3.2. Критерий Мерсье устанавливает только то, что локализованная собственная функция, которая имеет бесконечное число узлов по радиусу около резонансной поверхности, устойчива в торе. Собственная функция, соответствующая $m=2, n=1$, не являющаяся столь локализованной, может остаться неустойчивой, по аналогии с результатами для круглого цилиндра, обсуждавшимися в § 6.5*.

7.3.3. Возмущение, которое выбирается для вывода критерия Мерсье, является мелкомасштабным только в направлении, перпендикулярном магнитным поверхностям. Вдоль магнитных силовых линий оно однородно и поэтому усредняет градиент давления, кривизну и шир по всему тору.

7.3.4. Для круглого сечения $e=1$ без диамагнетизма и смещения наружу $Q=0, d=0$ критерий Мерсье сводится к $q^2 > 1$, в то время как достаточный критерий Лортца $1/q^2 < -1$ не может быть удовлетворен. В пределе сильной вытянутости $e \gg 1$ необходимый и достаточный критерии совпадают. Смещение магнитной оси наружу $d > 0$ и диамагнитный полоидальный ток $Q < 0$ благоприятны для устойчивости $1/q^2 < -2Q + d + \Theta(1/e)$. При фиксированных $d > 0$ и $Q < 0$ вытянутость, приводящая к минимальному значению q в достаточном критерии, равна

$$e = \left[\sqrt{\frac{3-d}{2(1-Q)}} - 1 \right]^{-1/2}.$$

Если $d=0$ и $Q=0$, минимальное значение q , достаточное для устойчивости около магнитной оси, равно $q > 2,22$ при $e=2,1$.

7.4.1. Когда систему аппроксимируют дискретной, бесконечное число резонансных поверхностей заменяется конечным числом поверхностей, резонансная частота которых находится в области первоначального континуума. Расположение этих частот внутри континуума зависит от способа замены системы на дискретную.

7.4.2.

$$\mathbf{V}_{\text{пол}}^1 = \nabla \times (\xi \times \mathbf{V}^0) \approx \xi \frac{nB_{\varphi 0} \sin(m\theta - n\varphi)}{R_0 (1 + \varepsilon \cos \theta)^2}, \quad \varepsilon \equiv a/R.$$

Следовательно, гармоники $m \pm 1$ составляют $\Theta(\varepsilon)$ от m -й гармоники.

8. Токамаки с большим β

8.1.1. Градиент давления вызывает неустойчивость вблизи внешней стороны цилиндрической оболочки, если

$$\beta_{\text{пол}} \equiv \frac{2\mu p_{\text{макс}}}{B_z^2 \text{кр}} < \frac{1}{4} \frac{R}{a},$$

где a — характерный размер для $p'(r) \approx p_{\text{макс}}/a$, а $q'(r) \approx q/a$. Для более точной оценки для профилей внутри плазмы можно использовать приближение плоской геометрии.

8.1.2. Сначала найдите магнитные оси, или точки сепаратрисы, где $|\nabla \psi| = 0$. Одна сепаратриса вблизи x -точки в $(0, 0)$ выглядит как ∞ . Ее бока окружают магнитные оси в $\{\pm [(I_2 - \pi J_0)/2I_4]^{1/2}, 0\}$. Она окружена другой сепаратрисой, за которой силовые линии разомкнуты с x -точкой в $\{\pm [(I_2 + 2\pi J_0)/8I_4]^{1/2}, \pm [(2\pi J_0 - I_2)/8I_4]^{1/2}\}$, если $0 < \pi J_0 < I_2 < 2\pi J_0$ и $0 < I_4$. Расстояние по вертикали между этими x -точками является мерой ширины плазмы.

8.2.1. Да. Для любого возмущения, которое минимизирует магнитную энергию за счет вакуумного магнитного поля внутри плазмы, $\nabla \cdot \xi$ можно приравнять нулю, подбирая компоненту ξ , параллельную \mathbf{V} , что не повлияет на возмущение магнитного поля.

8.2.2. Уравнение (8.2.14) дает неустойчивость, если

* Явный пример, демонстрирующий это утверждение, см. в работе: L. E. Zakharov. — Nucl. Fusion, 1978, v. 18, p. 335. — *Примеч. ред.*

$$\beta > 1 - \frac{m - (m - q)^2 \Lambda}{q^2 + (ka)^2}, \quad \Lambda \equiv \frac{1 + (a/r_{ст})^{2m}}{1 - (a/r_{ст})^{2m}},$$

так что стенка и эффекты конечности длины волны приводят к стабилизации более высоких значений β .

8.3.1. При уменьшении $B_{\text{тор}}$ внутри плазмы вне плазмы $B_{\text{тор}}$ должно увеличиться, чтобы сохранить тороидальный поток, и поэтому в катушках тороидального поля должен возникнуть дополнительный ток.

8.3.2. Плотность тока обратно пропорциональна квадрату расстояния между перегородкой и стенкой. Поэтому полный ток увеличивается как $1/[1 - (\delta/r_{ст})^2]$, где δ — смещение перегородки.

8.3.3. Нагрев плазмы увеличивает давление, что приводит к дисбалансу сил, в результате чего возникает направленное наружу движение со скоростью вдоль малого радиуса, при этом возбуждается полоидальное электрическое поле $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, приводящее к отрицательному $\frac{\partial}{\partial t} \int dS \cdot \mathbf{B}_{\text{тор}} = \int d\mathbf{l}_0 \cdot \mathbf{v}_r \times \mathbf{B}_{\text{тор}}$, диамагнитным полоидальным токам и дополнительной силе $\mathbf{J}_{\text{пол}} \times \mathbf{B}_{\text{тор}}$, которая восстанавливает баланс сил. Одновременно направленная наружу радиальная скорость дает увеличивающееся по радиусу $\mathbf{v}_r \times \mathbf{B}_{\text{пол}}$, которое увеличивает $\mathbf{B}_{\text{пол}}$ и продольный ток, так что его распределение становится более широким.

8.3.4. На поверхности плазмы возникает бесслойный поверхностный ток. В пределах этого поверхностного слоя производные потоков не сохраняются.

9. Нелинейная теория устойчивости

9.2.1. В идеально проводящей среде тороидальный и полоидальный потоки сцеплены, но в данном случае, по-видимому, это не имеет значения.

9.2.2.

$$\Delta W = -\frac{1}{4\mu} B_{\theta a}^2 a^2 (r_0/a)^4.$$

9.3.1. Скорости, параллельные магнитному полю, малы, так как неустойчивость, вызванная градиентом давления, имеет приблизительно такой же шаг, что и силовые линии.

9.3.2. Так как конвективные ячейки прокручиваются по винту вдоль плазменного шнура, они закручивают в винт магнитную ось и все другие силовые линии.

9.3.3.

$$\frac{\xi_a}{a} \approx \frac{13\pi (ka)^2}{3} \frac{a}{r_1},$$

$$\xi_a < r_s, \text{ когда } \left(\frac{r_s}{a}\right)^2 > \frac{13\pi (ka)^2}{3}.$$

10. Резистивные неустойчивости

10.1.1. Большой шир более благоприятен для перекрытия островов при заданной амплитуде возмущения радиального поля. Это связано с тем, что расстояние между островами обратно пропорционально шире, а ширина острова обратно пропорциональна квадратному корню из шира.

10.1.2. В искривленном магнитном поле можно за счет внешних токов образовать магнитные острова в вакууме. В этом случае токи, которые на первый взгляд идут в островах, в точности уничтожаются токами, связанными с преобразованием (10.1.1), которое иллюстрируется рис. 10.2.

10.1.3. На сепаратрисе силовые линии никогда не обходят вокруг острова, так как они задерживаются в x -точках. Вблизи оси острова магнитные поверхности выглядят как тонкие вытянутые цилиндрические поверхности с эллиптическим сечением с

$$q = \frac{B_{\text{тор}} k}{J_z^1} \frac{a^2 + b^2}{ab}, \quad b/a = B'_{*y} / kB_x^1,$$

$$J_z^1 = \frac{1}{k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} B_x^1.$$

10.1.4. Да, да.

10.1.5. Из $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ вычислите уменьшение в $B_y(x)$ и соответствующее уменьшение магнитной энергии $\Theta(B_y^1 B_y^0)$.

10.2.1. Условия

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^1 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

определяют v_y^1 .

10.2.2. Когда $\Delta' < 0$, продольный ток внутри острова течет в таком направлении, что B_y^1 увеличивает магнитную энергию, а не уменьшает ее.

10.2.3. Магнитные острова, связанные с наложенным внешним винтовым полем, способствуют уплощению профиля тока и уменьшению шира вблизи резонансной поверхности, уменьшая тем самым инкремент тиринг-моды. На значение Δ' они непосредственно не влияют.

10.4.1. Используя неравенство (7.2.45) и вариационную форму (3.3.7), можно показать, что неустойчивость Рэлея—Тейлора можно полностью стабилизировать широм, в то время как для резистивной перестановочной моды лишь несколько уменьшается инкремент.

11. Сравнение теории с экспериментом

11.1.1. Наибольший радиус поверхности $q=1$ получается, когда весь ток сосредоточен внутри поверхности $q=1$. При этом $r_{q=1} = a/(q(a))^{1/2}$.

11.1.2.

$$c = \sqrt{2} r_{q=1}.$$

11.2.1. Интенсивность рентгеновского излучения приблизительно пропорционально длине отрезка, ограниченного островом, плюс длине отрезка, находящегося в центральной части плазмы. При промежуточных углах зрения результирующий сигнал представляет синусоидальное возмущение, ограниченное снизу.

П Р И Л О Ж Е Н И Е Б. СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ

Альфвеновская волна — разновидность плазменных колебаний, в которых $\mathbf{v}^1 \parallel \mathbf{v}^1 \perp \mathbf{B}^0$, k (волна с широм), а фазовая скорость $\omega/k = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{V}^0 / \sqrt{\mu \rho^0}$.

Аспектное отношение R/a — отношение большого радиуса тора к малому; для прямого цилиндра отношение длины волны к $2\lambda a$.

Баллонные неустойчивости — класс неустойчивостей, в которых смещение неоднородно вдоль силовых линий магнитного поля на резонансной поверхности (§ 8.2, 8.3).

Бессилевое магнитное поле — магнитное поле, в котором $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$.

Бета (β) — мера давления плазмы (термодинамической энергии), нормированного на энергию магнитного поля [уравнение (8.0.1)].

Бифуркация — точка, в которой при изменении параметров возникает неоднозначность решения.

Вариационный принцип — интегральная форма записи системы уравнений на собственные значения (§ 3.1 и гл. 5).

Вектор смещения — интеграл по времени от возмущения скорости уравнение (5.2.1)].

Величина q — отношение числа оборотов силовой линии по большому обходу к числу оборотов по малому обходу тора.

Винтовая неустойчивость — в основном раскачивается за счет $\mathbf{J} \parallel \mathbf{B}$.

Винтовая неустойчивость с $m=1$ — плазма извивается в виде штопора (§ 6.2). **Внутренние неустойчивости**, или неустойчивости с закрепленной границей — могут быть даже при наличии жесткой, идеально проводящей стенки на границе плазмы.

Вращательное преобразование — величина, обратная q .

Давление магнитного поля — $\frac{1}{2\mu} \nabla |B|^2$, составляющая силы $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$, действующей на плазму (§ 2.4).

Достаточное условие устойчивости — гарантирует, что ни одна из МГД-неустойчивостей не будет возникать.

Желобковые моды — неустойчивости, в которых возмущение идет параллельно магнитному полю.

Звуковая волна — колебания сжимаемой плазмы с $v' \parallel \mathbf{k} \parallel \mathbf{B}^0$ с фазовой скоростью $\omega/k = \sqrt{\Gamma p/\rho}$.

Колебания Мирнова — винтовые возмущения магнитного поля, регистрируемые на границе плазмы в токамаке (§ 1.2 и 11.2).

Конвективные ячейки Бенарда — возникают при нагреве жидкости снизу (§ 9.1).

Координаты Хамады — специальная потоковая система координат для исследования МГД-равновесия, в которой линии тока \mathbf{J} и магнитного поля \mathbf{B} выглядят как прямые, а якобиан равен 1 (§ 7.1).

Критерий Сайдема — необходимое локальное условие устойчивости для прямой цилиндрической плазмы [уравнение (6.5.16)].

Критерий устойчивости Крускала—Шафранова — $q_{\text{гр}} > 1$, для стабилизации винтовой неустойчивости с $m=1$ (§ 6.2).

Критерий устойчивости Мерсье — служит для выяснения устойчивости возмущений, локализованных вблизи от резонансной поверхности [уравнение (7.2.49)].

Критическое β — значение β , при превышении которого плазма становится неустойчивой, обычно из-за баллонных мод (§ 8.2, 8.3).

Лагранжевы координаты — движущиеся вместе с жидкостью.

Магнитная ось — силовая линия, окруженная вложенными магнитными поверхностями (§ 4.2).

Магнитная поверхность — поверхность, в каждой точке которой магнитное поле направлено по касательной (§ 4.2).

Магнитная яма — область внутри плазмы с уменьшенным тороидальным полем [уравнение (7.2.48)].

Магнитное дифференциальное уравнение — уравнение типа (7.2.39) при заданных σ и \mathbf{B}^0 .

Магнитный остров — часть силовых линий, образующих свою собственную систему вложенных магнитных поверхностей с локальной магнитной осью (§ 10.1).

Магнитозвуковая волна (быстрая) — колебания в сжимаемой плазме с $v' \parallel \mathbf{k} \perp \mathbf{B}^0$ и с фазовой скоростью $\omega/k = \sqrt{(\Gamma p + B^2/\mu)/\rho}$.

МГД-модель, описывающая взаимодействие идеально проводящей жидкости и магнитного поля (гл. 2).

Модель с поверхностным током — весь плазменный ток протекает по поверхности плазмы, а давление однородно внутри плазмы.

Натуральные (потоковые) координаты — произвольная система координат, в которой одна из координат однородна на каждой магнитной поверхности (§ 7.1).

Натяжение магнитного поля — $\frac{1}{\mu} B^2 \mathbf{k}$, $\mathbf{k} = \widehat{\mathbf{B}} \cdot \widehat{\nabla \mathbf{B}}$ — составляющая силы $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$, действующей на плазму (§ 2.4).

Нейтральная устойчивость — переходное состояние между неустойчивым и устойчивым равновесием (§ 5, введение).

Необходимое условие устойчивости — условие, нарушение которого гарантирует неустойчивость.

Неустойчивость — тенденция к уходу из равновесного состояния (§ 5, введение).

Неустойчивость «отслаивания» (peeling) — неустойчивость, локализованная вблизи границы, при наличии там разрыва в плотности тока или его производной (§ 6.6).

Неустойчивость Рэлея—Тейлора — уменьшает в поле тяжести потенциальную энергию жидкости (гл. 3).

Неустойчивость со свободной границей — возникает при наличии вакуумного или плохо проводящего промежутка между плазмой и стенкой.

Неустойчивость срыва — резкое расширение плазменного шнура, сопровождаемое отрицательным выбросом напряжения и другими эффектами (§ 1.2 и 11.3).

Перестановочная неустойчивость — в основном раскачивается градиентом давления в искривленном магнитном поле, типа неустойчивости Рэлея—Тейлора.

Пилообразные колебания — релаксационные колебания вблизи центра плазмы в токамаке (§ 1.2 и 11.1).

Поверхностная величина — любая переменная, которая постоянна на каждой магнитной поверхности (§ 4.2).

Полоидальное — направление вдоль малого обхода тора.

Полоидальное бета — $\beta_{\text{пол}}$ — мера давления плазмы, удерживаемого полоидальным током (§ 4.4).

Показатель спада — характеристика неоднородности магнитного поля по большому радиусу [уравнение (4.7.14)].

Равновесие (МГД) — полный баланс сил внутри плазмы.

Рациональная магнитная поверхность — поверхность, на которой силовые линии замыкаются сами на себя (§ 4.2).

Резистивная перестановочная мода — раскачивается градиентом давления и кривизной магнитного поля (§ 10.4).

Резистивная тиринг-мода — образование магнитных островов для уменьшения магнитной энергии в областях, далеких от островов (§ 10.2).

Резонансная поверхность — магнитная поверхность, на которой возмущение идет вдоль силовой линии (§ 4.2).

Самосопряженность — свойство оператора и граничных условий, удовлетворяющих уравнению (5.3.2)

Сепаратриса — магнитная поверхность, разделяющая поверхности с разной топологией (§ 4.2).

«Сосисочная» неустойчивость с $m=0$ — локальные перетяжки шнура (§ 6.2).

Спитцеровская проводимость — удельная проводимость, которая дается формулой (2.6.18).

Токамак — система для удержания тороидальной плазмы (§ 1.2).

Токамак с большим β — имеет β порядка a/R или больше (гл. 8).

Токамак с сохраняющимися потоками — токамак с быстрым нагревом, при котором магнитные потоки заморожены в плазму (§ 7.3).

Тор — тороидальная поверхность с круглым поперечным сечением и круглым отверстием.

Тороид — тороидальная поверхность произвольной формы.

Тороидальное — направление вдоль большого обхода тороида, в отличие от полоидального.

Уравнение Грэда—Шафранова — описывает осесимметричное тороидальное равновесие.

Устойчивость — тенденция к возвращению в первоначальное равновесие при возмущении равновесного состояния.

Шир — пространственное изменение q .

Эйлеровы координаты — фиксированные в инерциальной системе отсчета координаты.

Энергетический принцип — вариационная форма, представляющая потенциальную энергию для линеаризованных МГД-уравнений (гл. 5).

Энтропийная волна — возмущение энтропии, обладающее нулевой фазовой скоростью.

Эргодическая силовая линия магнитного поля — линия, проходящая как угодно близко к любой точке поверхности или объема.

Эффект Холла — учитывается в слагаемом $[\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla(n_e T_e)] n_e e$ в законе Ома.

Алфавитно-предметный указатель

- Аспектное отношение** 11
 влияние на баллонные моды 133
 — — — — — устойчивость при больших β 126—128
 для цилиндра 91, 97
 конечное 11, 96, 115, 120
- β 7, 119
 — большое, влияние на винтовые моды 143—145
- β_{J68}
 β^* 119
 — в модели поверхностного тока 62, 125
 — критическое 123
 — — — — — в круглом цилиндре 125, 189, 190
 — — — — — торе 127, 131, 189
 — — — — — эллиптическом цилиндре 126
 — полоидальное 55, 56, 113, 119, 133
 — предел по равновесию 129, 186
- Бифуркация** 61, 71, 139, 140, 148
- Вектор Пойнтинга** 32, 182
 — смещения 73, 74
- Величины поверхностные** 49—53
- Возмущения винтовые в эксперименте** 12—16, 179
 — в магнитных островах 152—154
 — — — — — торондальных неустойчивостях 116
 — магнитного поля в баллонных модах 131
 — — — — — вакууме 89
 — — — — — выводе критерия Мерсье 106—109
 — — — — — колебаниях Миронова и неустойчивости срыва 15, 177, 179
 — — — — — линеаризованных МГД-уравнениях 74
 — — — — — Δ' для тиринг-мод 157, 159, 160, 166, 191
 — при нелинейном развитии внутренних неустойчивостей 143—147
- Волновые числа** 12, 94, 95, 106, 128
 — в торе 116
 — — — — — нелинейное зацепление 139
- Волна магнитозвуковая** 78, 79
- Волны альфвеновские** 79
 — энтропийные 44
- Время альфвеновское пролетное** 159
 — ион-ионных столкновений 36
 — скиновое 159
 — удержания 3, 8, 9, 12, 14
- Диагностики экспериментальные** 9, 12, 13, 16—19, 23, 171, 173, 175, 177
- Давление магнитное** 31, 36, 182, 183
 — — — — — в равновесной конфигурации 48, 58
 — — — — — для модели с поверхностным током 62
 — — — — — плазмы 24, 35, 51
 — — — — — влияние на баллонные моды 132, 133
 — — — — — вклад в силу по большому радиусу
- в токамаке 64, 65
 — — — — — возмущение 74, 116, 128, 134, 187
- Диаграммы устойчивости (расчетные и экспериментальные):**
 баллонных мод 133
 мод с закрепленной границей в круглом цилиндре 94
 — — — — — прямоугольном цилиндре 128
 — — — — — торе 116
 — — — — — со свободной границей в торе 117
 для модели поверхностного тока 125—127
- Диаграммы неустойчивости срыва** 14
- Диамагнетизм** 55, 56
 — вклад в силу по большому радиусу в токамаке 65, 66, 68
- Дублет, конфигурация** 61, 121, 122
- Задача на собственные значения** 76, 79
 — — — — — для круглого цилиндра 87—91
 — — — — — Штурма — Лиувилля 89
 — с начальными условиями 79, 114, 115
- Закон Ампера** 24, 183
 — Ома 37
 — Фарадея 24, 27, 32—33
- Запас устойчивости (см. Параметр)**
- Зацепление полоидальных гармоник** 115—118, 134
- Излучение рентгеновское:**
 жесткое 13, 16, 175, 191
 мягкое 16—19, 23, 171—175, 177
- Индуктивность** 67, 131
- Инкремент:**
 баллонных мод 133
 внутренних неустойчивостей в круглом цилиндре 94
 — — — — — вытянутом цилиндре 128
 винтовой неустойчивости, $m=1$ 98
 внутренней винтовой моды, $m=1$ 94
 тиринг-моды, $m=1$ 161—162
 неустойчивости Рэлея — Тейлора 41—44, 46, 184
 резистивных перестановочных мод 165—167
 торондальных неустойчивостей 117
- Ионы надтепловые, ускоренные неустойчивости** 6, 181
- Ковариантные компоненты** 100
 Кожух в токамаке 10, 64
 идеально проводящий, граничные условия 33
 стабилизация 97, 142
 Колебания Миронова 14—17, 22—23, 175—176, 180
 — — — — — влияние на неустойчивость срыва 176
 — — — — — вращение 175—176
 — пилообразные 16—19, 139, 170—174, 177, 180
 — устойчивые 77, 89, 95, 114

Конвективная производная 24
 Конференция МАГАТЭ 21
 Ковариантные компоненты 100, 105
 — магнитного поля 102—103
 — плотности тока 103—104
 Координаты криволинейные 100
 — натуральные (потокосные) 100—104, 118, 188
 — лагранжеры 32, 74
 — Хамады 103, 104
 — эйлеровы 32, 74
 Кривизна 30, 78
 — полоидальная и торондальная компоненты 112, 125
 — влияние на устойчивость при больших β 125, 126
 — тороидальная, влияние на баллонные моды 124, 127, 132
 Критерий Лоусона 4, 23
 Критерий устойчивости (См. Условия устойчивости)
 Кручение 78

Маятник, аналогия с неустойчивостью Рэлея — Тейлора 46, 47, 185
 — в магнитном поле 30
 Метод возмущений сингулярный для линейной моды, $m=1$ 93, 94
 — — — нелинейной моды, $m=1$ 140, 148
 — — — резистивных неустойчивостей 149
 — конечных элементов 115
 — пристрелки 90
 — спектральный, численный 115
 Множитель Лагранжа 80, 110
 Модель адиабатическая для неустойчивости Рэлея — Тейлора 43, 44
 — изотермическая 44
 — магнитогидродинамическая 23—25, 34—38
 — с двумя адиабатами 36
 — — — поверхностным током 62, 63, 123—129, 131, 135
 — — — нелинейные винтовые моды 141
 — — — устойчивость для конечного β 123—129
 — — — энергетический принцип 78, 91
 Моды винтовые 82 (см. также Неустойчивости, условия неустойчивости)

Нагрев омический 5, 120, 121
 Наклон силовой линии 53, 112
 Насыщение нелинейное:
 винтовой неустойчивости 141—143
 внутренней моды $m=1$ 147, 190
 Натяжение магнитных силовых линий 31, 183
 влияние на неустойчивость Рэлея — Тейлора 46
 в равновесной конфигурации 48, 57
 Неравенство, используемое при выводе критериев Мерсье и Сайдема 110
 Несжимаемость:
 в баллонных модах 124, 132, 189
 в неустойчивостях круглого цилиндра 90
 в тиринг-модах 156
 влияние на неустойчивость Рэлея — Тейлора 40—42
 для вывода критерия Мерсье 106
 Неустойчивости 71—72, 76
 аксиально-симметричные 68—70
 баллонные 21, 123, 131, 132
 винтовые 82 (см. также винтовые $m=1$, $m \geq 2$)
 — $m=1$ 6, 7, 22, 84—86, 96—98, 140—142, 180
 — $m \geq 2$ 86, 87, 97—98, 142, 143
 влияние на большие β 123—129, 131—134

— на вытянутость сечения 126—129
 внутренние, или с закрепленной границей 91—96, 116, 128, 143—147
 — $m \geq 2$ 94, 144—147
 внутренние винтовые $m=1$ 91—94, 143—146, 162
 локализованные 8, 41, 94—96, 106, 165
 Мерсье 104—114
 осесимметричные, в торе 68, 69
 отслаивания (peeling) 98
 перестановочные 82 (см. также Неустойчивость Рэлея — Тейлора)
 — резистивные 164—167
 Рэлея — Тейлора 39—47, 182—184
 Сайдема 96
 со свободной границей 90, 96—98, 114, 117, 123—129, 140—143
 сосисочные (перетяжки) $m=0$ 5, 6, 22, 84, 187
 срыва 12—14, 22, 176—180
 тиринг-моды $m \geq 2$, резистивные 155—161
 токосые 84—87
 тороидальные 114—118, 167
 Номер радиальной моды 90

Область вакуумная 33
 — в круглом цилиндре 87, 89
 — — — энергетическом принципе 78
 Обмотки полоидального поля 64
 Осевое стягивание плазмы вытянутого сечения 122
 Острова магнитные:
 в резистивной тиринг-моды, $m=1$ 163, 164
 — — — $m \geq 1$ 155, 156, 160, 161
 связь с неустойчивостью срыва 177—180
 — колебаниями Миронова 175, 176
 ширина 153, 154, 161
 Осциллограммы 17
 Ось магнитная 28, 49, 53, 185
 — острова 50, 149, 151, 155
 — критерий Мерсье 111—114
 Отношение удельных теплоемкостей 25

Параметр q 51—53, 103, 185
 в экспериментах на токамаках 14, 16, 172
 внутри магнитного острова 155, 191
 диаграммы устойчивости 14, 94, 116—117, 125—126, 133
 для вытянутого цилиндра 59
 — круглого цилиндра 83, 86, 91, 187
 — осесимметричного тора 129, 171
 профиль 172, 173, 187, 191
 сохранение в идеально проводящей жидкости 129—130
 Перегородки (для выделения магнитных потоков) 50
 Перезамыкание силовых линий 163, 168—169, 178
 Пинчи:
 с обращенным полем 99, 144
 скрю-пинчи, θ -пинчи, Z-пинчи 82
 Пичок напряжения отрицательный 12, 13, 180
 Плазма 24
 — нагрев 4, 9, 170—173
 — осесимметричная 11
 Плотность заряда 35
 — плазмы 35
 — — — ограничение по неустойчивости срыва 14
 — тока 23—24, 35, 36
 — — в винтовой неустойчивости 187
 — — — координатах Хамады 103—104
 — — — тиринг-моды 157, 159
 Показатель спада 69
 Поле вертикальное 64, 68, 70
 — — образование сепаратрисы 129

— окупольное 121
 — электрическое в разных системах отсчета 24, 27
 Поверхности магнитные 49
 вытянутого сечения 57—64, 122
 в Дублете 122
 смещение 112
 с треугольностью 114
 тороидальные 130
 Поверхность резонансная 50
 в цилиндре 89, 93, 94
 и магнитные острова 151
 при выводе критерия Мерсье 106—108
 Поле магнитное:
 винтовое 159, 176—177
 замороженность в идеальной проводящую
 жидкость 27—30, 129
 в натуральных координатах 101—103
 свойство бездивергентности 25—26
 полоидальное и тороидальное в токамаке 9—11
 Поток винтовой 154
 — магнитный 25, 50
 — на границе 32, 33
 Преобразование вращательное 53
 — Галилея и закон Фарадея 24, 27
 Приближение большого аспектного отношения 67, 91, 97, 111—114, 127, 132
 — низкого β 112, 115
 Примеси 9, 12, 17
 Принцип вариационный 46
 — для критерия Мерсье 110
 — наименьшего действия 76
 — энергетический 75—77
 — для круглого цилиндра 90, 91
 — модель поверхностного тока 123—129
 — — нормировка 80
 Проницаемость магнитная 5, 24
 — электрическая 5
 Профиль давления 54, 134
 — нелинейная эволюция 145—147
 — тока в круглом цилиндре 83, 187
 — — торе 54
 — — влияние на вытянутость 63—64, 121—123
 — — при больших β 130, 131
 — — расширение при неустойчивости срыва 177—180
 — — экспериментальное определение 171
 (см. также Бессиловой ток)
 Процесс динамический 74
 Пузыри магнитные 142

Равновесие, МГД 48—49, 70—71
 — в координатах Хамады 100—104
 — в круглом цилиндре 82—84
 — — токамаке 64—69
 — вытянутого цилиндра 57—64, 122, 185
 — конфигурация Шафранова — Соловьева 56, 185
 — модель поверхностного тока 62—63
 — ограничение на β 129, 186
 — с винтовой симметрией 58
 — серия с замороженными потоками 129—131
 (см. также Бифуркация, Уравнение Грэда — Шифранова)
 Расчеты линейных неустойчивостей в цилиндре 90, 94—96, 99
 — — — торе 114—119
 — тиринг-моды $m=1$ 163—164
 — численные нелинейные 138, 139, 142—147
 Расширение при неустойчивости срыва 12—13, 178—180

Самосопряженность 75, 77
 Сверхустойчивость 72, 167

Сепаратриса 49
 вокруг магнитного острова 152—154, 190
 в тороидальном равновесии 129
 при вытянутом сечении 57, 189
 Сечение поперечное вытянутое 116, 117, 127
 — — D -образное 113, 114, 130, 131, 133, 134
 — — дублеты 121, 122
 Сечение поперечное тора 112, 127, 135
 Сжатие и расширение 25, 88
 (см. также Несжимаемость)
 Сила Лоренца 27
 — $J \times B$ 24, 27, 30, 31, 48, 49, 84, 85
 — электростатическая 26, 36
 Силовые линии магнитного поля 25, 27—30, 39, 182
 — — эргодические 25, 178
 Скорость альфвеновская 24, 144
 — жидкости 35, 175, 176
 Слой плоский 40—46, 151—154
 — пограничный для внутренней винтовой моды $m=1$ 93, 94, 140
 — — резистивных перестановочных мод 166
 — — — тиринг-моды 49, 157—160
 Сопровождение электрическое:
 необходимость для образования островов 153
 спитцеровское (классическое) 37
 Сохранение импульса 36
 — момента количества движения 33
 — энергии 37, 76, 183
 Спектр собственных значений 41
 для круглого цилиндра 89, 99
 неустойчивости Рэлея — Тейлора 41—42, 44
 численный расчет 80
 Стабилизация динамическая 46, 47, 185
 — конечным ларморовским радиусом 162
 Стягивание плазмы. вытянутого сечения осевое 122

Температура 35
 — во время неустойчивости срыва 178
 — профиль в пилообразных колебаниях 170, 171
 Тензор максвелловских натяжений 31, 183
 — метрический 101
 Теорема Гаусса 26, 32, 48, 124
 Теория переносов неоклассическая 39
 Теплопроводность 37, 173
 Тиринг-мода, резистивная 155
 $m=1$ 161—164, 168
 $m=1$, влияние на пилообразные колебания 170, 172—173
 $m \geq 2$, ливневая теория 155—159, 168
 $m \geq 2$, нелинейная теория 159—160, 168
 $m \geq 2$, связь с колебаниями Мирнова 175—176
 $m \geq 2$, связь с неустойчивостью срыва 176—178

Ток 51
 смещения 24, 183
 тороидальный в неустойчивости срыва 12—14
 уменьшение в винтовых модах 141
 или поле бессильные 56, 189
 — — влияние на устойчивость при больших β 119, 133
 Токамаки 9—11, 21—22
 равновесие 64—69
 с замороженными потоками 129—135; 137, 189
 устойчивость 12—19, 170—180
 Токи диамагнитные 130, 131
 Турбулентность 140, 148

Убегающие электроны 10, 11, 14, 178
 Управляемый термоядерный синтез 4, 119—120
 Уравнение:
 Глассера — Грина — Джонсона, дисперсионное 166
 Грэда — Шафранова 53, 56, 71, 139
 для импульса (2.1.1) 23
 Уравнение для импульса в консервативной форме 30—32
 — на границе 33
 магнитное дифференциальное 109
 моментов 34—38
 непрерывности 23, 32, 36, 40
 Эйлера 80, 184.
 — для круглого цилиндра 92, 95, 188
 Уравнения МГД, консервативная форма 32—34
 — — линеаризованные 71, 75, 87, 90
 Ускорение силы тяжести и неустойчивость Рэлея — Тейлора 40, 184
 Условия граничные 33, 75
 — — при выводе критерия Мерсье 107
 — устойчивости (аналитические) баллонных мод 131
 винтовой моды $m=1$ 85
 винтовых мод $m \geq 2$ 87
 достаточные 80, 104
 круглого цилиндра, модель поверхностного тока 125, 189—190
 Крускала — Шафранова 7, 11, 86, 97
 Лортца — Нюрнберга 113—114
 Мерсье 111
 — вывод 104—111, 118
 — применения 111—114, 188—189
 необходимые 80, 104
 осесимметричных мод 69
 перетяжек $m=0$ 187
 резистивной тиринг-моды $m=1$ 161—162, 191
 — — $m \geq 2$ 158—159, 167, 190
 резистивных перестановочных мод в плоском слое 165
 — — — — торе 166
 Сайдема 96
 Шафранова — Юрченко 111—112
 эллиптического цилиндра, винтовые моды $m \geq 1$ 126
 — неустойчивости Рэлея — Тейлора 42—46, 184
 Устойчивость 71—72, 75, 186
 — нейтральная 72, 77, 80, 187

 Физика плазмы 21—22
 Функции собственные 73, 77
 Функция Бесселя 89
 — Грина 59
 — погожа 53—54
 — — винтового 154

— — в круглом цилиндре 83
 — — для симметричных конфигураций 58
 — — произвольного магнитного поля 102—103
 Функция пробная 42, 80
 — — $m=1$ 91
 — — Мерсье 110
 — — Сайдема 96
 Фурье-анализ 41, 46, 87, 128

Частота диамагнитного дрейфа 162
 — циклотронная 36, 37
 Число Рейнольдса магнитное 159

Шпр 45
 влияние на баллонные моды 133
 — — внутреннюю моды $m=1$ 162
 — — нелинейные винтовые моды 142
 — — неустойчивость Рэлея — Тейлора 46
 глобальный 109, 111
 для круглого цилиндра 83, 91—94
 и критерии Мерсье 112

Эволюция нелинейная винтовой неустойчивости 141—143
 — — неустойчивостей с закрепленной границей 143—147
 — — неустойчивости Рэлея — Тейлора 34
 Экспериментальные наблюдения 4—23, 169—180
 — установок, справочник МАГАТЭ 22
 Электродвижущая сила 181
 Энергия магнитная 14, 46, 102, 182, 183, 191
 — в неустойчивости Рэлея — Тейлора 43—44
 Эффект Холла 37, 176

Якобиан 100, 103
 Яма магнитная 111, 112
 Ячейки вихревые в баллонных модах 134, 135
 — — в неустойчивостях круглого цилиндра 92
 — — — в тороидальных неустойчивостях 116, 117
 — — во внутренних неустойчивостях прямоугольного цилиндра 145—147
 — конвективные Бенарда 140, 148, 167
 — — — баллонных модах
 — — — неустойчивостях круглого цилиндра 92
 — — — резистивных перестановочных модах 165
 — — — тиринг-модах 156
 — — во время нелинейной эволюции неустойчивостей 145—147

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Введение	5
§ 1.1. Историческая справка	6
§ 1.2. Токамаки	9
§ 1.3. Содержание книги	19
§ 1.4. Библиография	21
§ 1.5. Список литературы	22
Глава 2. МГД-уравнения	23
§ 2.1. Введение	23
§ 2.2. Поток магнитного поля и закон Фарадея	25
§ 2.3. Движение магнитных силовых линий	27
§ 2.4. Сила $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$	30
§ 2.5. Консервативные формы МГД-уравнений	32
§ 2.6. Эффекты, не описываемые МГД-моделью	34
§ 2.7. Резюме	38
§ 2.8. Список литературы	39
Глава 3. Неустойчивость Рэлея — Тейлора	39
§ 3.1. Гидродинамическая модель несжимаемой жидкости	40
§ 3.2. Гидродинамическая модель сжимаемой жидкости	43
§ 3.3. Неустойчивость Рэлея — Тейлора в МГД-модели несжимаемой жидкости	45
§ 3.4. Резюме	47
§ 3.5. Список литературы	47
Глава 4. МГД-равновесие	48
§ 4.1. Уравнения баланса сил	48
§ 4.2. Поверхностные величины	49
§ 4.3. Параметр q	51
§ 4.4. Уравнение Грэда—Шафранова	53
§ 4.5. Цилиндр с вытянутым поперечным сечением как пример бифуркации	57
§ 4.6. Плазма, зажата между проводящими стенками	61
§ 4.7. Равновесие плазмы в токамаке	64
§ 4.8. Резюме	70
§ 4.9. Список литературы	70
Глава 5. Линеаризованные уравнения и энергетический принцип	71
§ 5.1. Линеаризованные уравнения	72
§ 5.2. Уравнение для ξ	73
§ 5.3. Энергетический принцип	75
§ 5.4. Различные формы энергетического принципа	77
§ 5.5. Методы линейной теории устойчивости	79
§ 5.6. Резюме	81
§ 5.7. Список литературы	81
Глава 6. Неустойчивости в круглом плазменном цилиндре	82
§ 6.1. Равновесие	82
§ 6.2. Физическая картина токовых неустойчивостей	84
§ 6.3. Одномерные уравнения на собственные значения	87
§ 6.4. Одномерный энергетический принцип	90
§ 6.5. Неустойчивости плазмы с закрепленной границей	91
§ 6.6. Неустойчивость плазмы со свободной границей	96
§ 6.7. Резюме	98
§ 6.8. Список литературы	99

Глава 7. Неустойчивости тороидального шнура	99
§ 7.1. Натуральные координаты	100
§ 7.2. Критерий устойчивости Мерсье	104
§ 7.3. Применения критерия Мерсье	111
§ 7.4. Крупномасштабные неустойчивости в осесимметричных тороидальных конфигурациях	114
§ 7.5. Резюме	117
§ 7.6. Список литературы	118
Глава 8. Токамаки с большим β	119
§ 8.1. Вытянутое сечение	120
§ 8.2. Неустойчивости при большом β : модель поверхностного тока	123
§ 8.3. Токамаки с замороженными потоками	129
§ 8.4. Резюме	135
§ 8.5. Список литературы	136
Глава 9. Нелинейная теория неустойчивостей	137
§ 9.1. Нелинейные методы	138
§ 9.2. Неустойчивости со свободной границей	140
§ 9.3. Неустойчивости с закрепленной границей	143
§ 9.4. Список литературы	148
Глава 10. Резистивные неустойчивости	148
§ 10.1. Магнитные острова	150
§ 10.2. Нарастание резистивной тиринг-моды	155
§ 10.3. Резистивная тиринг-мода $m=1$	161
§ 10.4. Резистивная перестановочная мода	164
§ 10.5. Резюме	167
§ 10.6. Список литературы	168
Глава 11. Сравнение теории с экспериментом	169
§ 11.1. Пилообразные колебания	170
§ 11.2. Колебания Мирнова	175
§ 11.3. Неустойчивость срыва	176
§ 11.4. Список литературы	180
Приложение А. Комментарии к вопросам	182
Приложение Б. Словарь терминов	114
Алфавитно-предметный указатель	199

Глен Бейтман

МГД-неустойчивости (США)

Редактор *Безрукова В. Н.*
Художественный редактор *А. Т. Кирьянов*
Технический редактор *В. В. Хапаева*
Корректор *З. Б. Драновская*

ИБ № 1193

Сдано в набор 25.05.82 Подписано в печать 12.10.82
Формат 60×90^{1/16} Бумага типографская № 1 Гарнитура литературная
Печать высокая Усл. печ. л. 112,5. Усл. кр.-отт. 12,5. Уч.-изд. л. 15,06
Тираж 1300 экз. Заказ 1600 Цена 2 р. 50 к.

Энергоиздат, 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10

Московская типография № 6 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
109088, Москва, Ж-88, Южнопортовая ул., 24

МГД-
неустойчивости

Г. Бейтман